ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVIII 1959 2

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Распространение давления в упругом полупространстве

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 29. I. 1959)

Рассматривается задача о распространении в глубь упругого полупространства переменного давления, приложенного к его поверхности.

Рассмотрим плоскую задачу.

Пусть в некоторой точке O границы упругой полуплоскости возникло давление, которое затем распространяется вдоль границы ударной волной.

Закон распределения за фронтом давления произвольный, известный.

Направим ось OX по границе полуплоскости, которую предполагаем неизменной со временем t, ось OY направим в глубь полуплоскости. Обозначим через σ_x, σ_y и τ_{xy} компоненты тензора упругих напряжений.

На границе имеем граничное условие

$$\sigma_y = \begin{cases} p_1(x, t) & |x| < R(t) \\ 0 & |x| > R(t) \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Здесь $R(t)$ есть координата фронта на границе полуплоскости, $p_1(x, t)$ — распределение давления за фронтом.

Решение поставленной задачи по методу В. И. Смирнова и С. Л. Соболева ([1]) получено в работе ([4]) в виде квадратур типа интеграла Поссио.

На фронте продольной упругой волны BA (фиг. 1) тензор упругих напряжений можно найти в следующем простом виде:

$$\sigma_x = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},$$

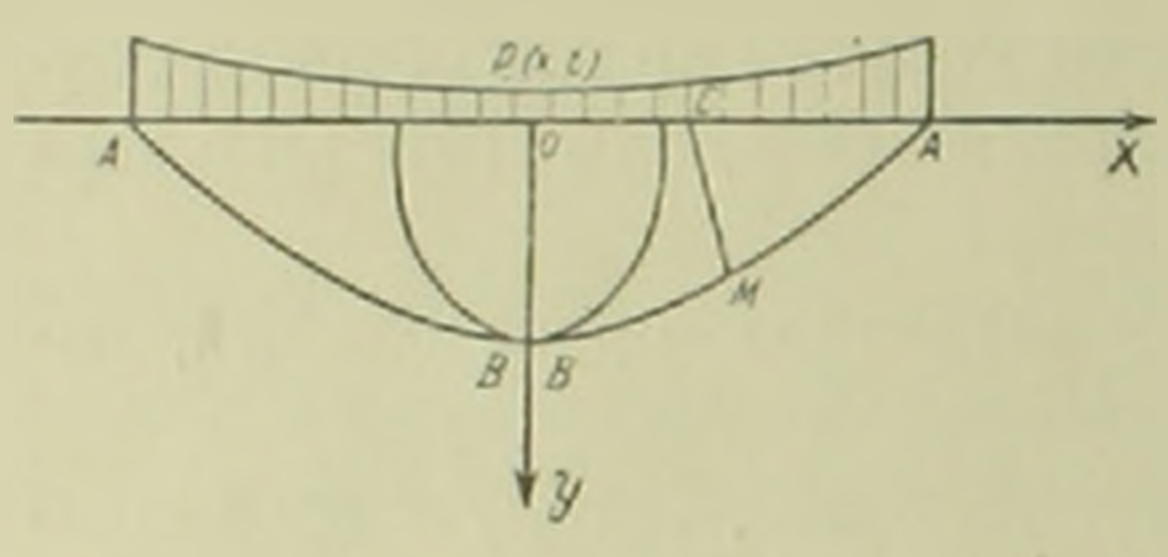
$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(2\frac{1}{v^2}-b^2\right)\frac{1}{v^2}}{\left(2\frac{1}{v^2}-b^2\right)^2+4\frac{1}{v^2}\sqrt{a^2-\frac{1}{v^2}}\sqrt{b^2-\frac{1}{v^2}}}\,\frac{p_z(x,y,t)}{\mu},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}(M^2-1),\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \sqrt{M^2-1}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

где λ, μ постоянные Ламэ; $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$ соответственно скорость продольных и поперечных волн; $M = Va = R'(\bar{t}_*)\,a$; значение $\bar{t}_*$ находится из уравнения $R(\bar{t}_*) = \bar{r}_0^* = R\left[t - \sqrt{(r_0^* - x)^2 + y^2}\;a\right]$. $p_z(x, y, t)$ соответствует распределению давления на головной волне BA в случае, если полуплоскость занята идеальной жидкостью [4].



Фиг. 1.

Начальная скорость звука в жидкости $a_0 = \frac{1}{a}$. Найдем распределение давления вдоль ВА для жидкости с помощью лучевого метода [2]. Поскольку уравнения движения для жидкости [1] сводятся к одному волновому уравнению для давления $p(x, y, t)$, характеристические лучи будут прямыми линиями. Следуя работе [2], запишем уравнение фронта BA в виде:

$$\begin{aligned} x_M &= x_0(\Theta) + a\,[t - t_0(\Theta)]\cos\Theta, \\ y_M &= y_0(\Theta) + a\,[t - t_0(\Theta)]\sin\Theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где Θ—угол нормали (луча CM) в точке M фронта с осью OX; $x_0(\Theta)$, $y_0(\Theta)$—координаты точки пересечения луча CM с осью OX; $t_0(\Theta)$ — момент времени, когда фронт проходил через точку C.

Из (1) имеем очевидное равенство

$$[x - x_0(\Theta)]^2 + [y - y_0(\Theta)]^2 = a_0^2\,[t - t_0(\Theta)]^2. \tag{2}$$

В нашем случае очевидно: $y_0(\Theta) = 0$,

$$x_0(\Theta) = R\,[t_0(\Theta)].$$

Исключая параметр Θ из (1) и учитывая соотношение для угла $\Theta - \cos\Theta = \frac{a_0}{R'\,[t_0(\Theta)]}$ (1)$_1$, можно получить уравнение фронта BA в виде построения Гюйгенса огибающей возмущений:

$$[x - R(t_0)]^2 + y^2 = a_0^2 (t - t_0)^2$$

$$[R(t_0) - x]\, R'(t_0) = a_0^2 (t_0 - t), \tag{3}$$

причем

$$x_0 = R(t_0) = R\left[t - \frac{1}{a_0}\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2}\right]. \tag{4}$$

Очевидно, $x_0 = \overline{r}_0^*$; а $t_0 = \overline{t}_*$ (см. выше).

Используем известный результат ([2]) для распределения давления на каждом луче (например для CM) вблизи фронта.

$$p_2(x, y, t) = \frac{A_0(\Theta)}{\sqrt{t - t_c(\Theta)}},$$

где

$$t_c(\Theta) = t_0(\Theta) - \frac{-x_0^{\cdot}(\Theta)\sin\Theta + y_0^{\cdot}(\Theta)\cos\Theta}{a_0}. \tag{5}$$

Из $(1)_1$ имеем

$$\frac{dt_0}{d\Theta} = \frac{R'^2(t_0)\sin\Theta}{a_0 R'(t_0)} \quad \text{и} \quad x_0^{\cdot}(\Theta) = R'(t_0)\frac{dt_0}{d\Theta}.$$

Окончательно имеем вдоль луча:

$$p_2(x, y, t) = \frac{A_0(\Theta)}{\sqrt{t - t_0(\Theta) - \dfrac{R'^3[t_0(\Theta)]\sin^2\Theta}{a_0^2 R''[t_0(\Theta)]}}}. \tag{6}$$

При $t = t_0(\Theta)$ имеем

$$p_2(x, y, t) = p_1[x_0(\Theta), t_0(\Theta)].$$

Определяя постоянную $A_0(\Theta)$ в (6), получим:

$$\frac{p_2(x, y, t)}{p_1[x_0(\Theta), t_0(\Theta)]} = \sqrt{\frac{-R'^3[t_0(\Theta)]\sin^2\Theta}{a_0^2 R''[t_0(\Theta)][t - t_0(\Theta)] - R'^3[t_0(\Theta)]\sin^2\Theta}}, \tag{7}$$

где

$$t_0(\Theta) = \overline{t}_*; \quad x_0(\Theta) = \overline{r}_0^*(^4); \quad \cos\Theta = \frac{a}{R'(t_*)}.$$

Для случая осевой симметрии из аналогичных рассуждений получим вдоль BA:

$$p(x, y, t) = \frac{A_0(\Theta)}{\sqrt{[t - t_0(\Theta)]\, x}}, \tag{8}$$

или с учетом условий в точке C

$$\frac{p(x, y, t)}{d_1[x_0(\Theta), t_0(\Theta)]} = \sqrt{\frac{-R'^3[t_0(\Theta)]\sin^2\Theta \cdot \dfrac{x_0(\Theta)}{x}}{a_0^2 R''[t_0(\Theta)][t - t_0(\Theta)] - R'^3[t_0(\Theta)]\sin^2\Theta}}. \tag{9}$$

Для случая $R'(t) = \text{const} = V$ из (9) имеем:

$$x_0(\Theta) = \frac{M^2 x - vt}{M^2 - 1} \left(M - \frac{v}{a_0} \right),$$

$$\frac{p(x, y, t)}{p_1} = \sqrt{\frac{M^2 x - vt}{x(M^2 - 1)}}. \tag{10}$$

Выражение (10) было получено А. Я. Сагомоняном [3] методом конических течений.

В случае неоднородной жидкости (скорость звука a_0 меняется с глубиной) распределение давления вдоль головной волны BA можно получить также лучевым методом, если пользоваться функцией σ, построенной С. Л. Соболевым [5].

Московский государственный университет
им. Ломоносова

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

Ճնշման տարածումը առաձգական կիսատարածության մեջ

Հոդվածում դիտվում է առաձգական միջավայրի ներսում, նրա մակերեսի վրա կիրառված փոփոխական ճնշման տարածման խնդիրը։

Հարթ խնդրի դեպքում լարվածության բաղադրիչների համար ակադեմիկոսներ Վ. Ի. Սմիրնովի և Ս. Լ. Սոբոլևի մեթոդով ստացված են բանաձևեր Պուասոնի ինտեգրալ տիպի կվադրատուրաների տեսքով։ Վերջիններս ինտեգրման փոփոխականի ձևափոխման միջոցով բերվել են ուշացող պոտենցիալների տեսքի և ապա ուսումնասիրվել համապատասխան մեթոդներով։

Ստացված են պարզ տեսքի հաշվային բանաձևեր կիսատարածության ալիքների ճակատների (ֆրոնտների) մոտակայքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. И. Смирнов* и *С. Л. Соболев.* Sur une méthode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastiques, 1932. [2] *А. Ф. Филиппов.* О приближенном вычислении волн., „Известия АН СССР“, серия геоф., № 7, стр. 841, 1957. [3] *А. Я. Сагомонян.* Докторская диссертация, МГУ. [4] *А. Г. Багдоев.* Кандидатская диссертация, МГУ. [5] *С. Л. Соболев.* К вопросу об интегрировании волнового уравнения. Труды сейсмологического института АН СССР, 1934.