ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVII 1958 5

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

М. А. Задоян

# Об одном вариационном уравнении нелинейной теории ползучести

(Представлено Н. Х. Арутюняном 11.IX.1958)

Выводится вариационное уравнение Кастилиано для нелинейной теории ползучести таких материалов, как бетон, пластмасса, дерево и др. В теории ползучести, относящейся главным образом к металлам, вариационные принципы установлены Л. М. Качановым в его монографии ([1]).

Принимаем, что в нелинейной теории ползучести для названных выше материалов связь между компонентами деформаций и напряжений определяется соотношениями ([2, 3])

$$E\varepsilon_x^* = (1+\nu)\sigma_x^* - \nu S^* - \int_{\tau_0}^{t} [(1+\nu)\sigma_x^* - \nu S^*]\, Q(\sigma_i^*)\, K(t, \tau)\, d\tau$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$G\gamma_{xy}^* = \tau_{xy}^* - \int_{\tau_0}^{t} \tau_{xy}^* Q(\sigma_i^*)\, K(t, \tau)\, d\tau. \qquad (1)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Здесь модуль деформации $E$ и коэффициент Пуассона $\nu$ для простоты приняты постоянными, $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $S^* = \sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^*$, $K(t, \tau) = E\dfrac{\partial}{\partial\tau}C(t, \tau)$ — ядро последействия, $\sigma_i^*$ — интенсивность касательных напряжений

$$\sigma_i^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x^* - \sigma_y^*)^2 + (\sigma_y^* - \sigma_z^*)^2 + (\sigma_z^* - \sigma_x^*)^2 + 6(\tau_{xy}^{*2} + \tau_{yz}^{*2} + \tau_{xz}^{*2})} \qquad (2)$$

$$Q = \frac{H(\sigma_i^*)}{\sigma_i^*}.$$

Если характер нелинейности при растяжении и сжатии различен, то в этих областях вместо $H$ можно принять соответственно $H_1$ и $H_2$. Вид функции $H_2$ для бетона в случае одноосной задачи экспериментально определен П. И. Васильевым ([4]).

Соотношение (1) является естественным обобщением, с одной стороны, трехмерной задачи линейной теории ползучести ([4]), а с другой — одномерной задачи нелинейной теории ползучести ([4, 5]).

Пусть тело, обладающее свойством ползучести, под действием внешних поверхностных сил находится в равновесии. При отсутствии массовых сил компоненты напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma^*_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau^*_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau^*_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и условиям на поверхности $S$

$$\sigma^*_x \cos(n, x) + \tau^*_{xy} \cos(n, y) + \tau^*_{xz} \cos(n, z) = X_n.$$

В некоторый момент $t$, наряду с истинным распределением напряжений, рассмотрим другое возможное напряженное состояние $\sigma^*_x(t) + \delta\sigma^*_x(t), \cdots, \tau^*_{xy}(t) + \delta\tau^*_{xy}(t), \cdots$, бесконечно близкое к реальному и удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности. Очевидно, что вариации напряжений и вариации поверхностных сил в рассматриваемый момент $t$ уравновешиваются.

$$\frac{\partial \delta\sigma^*_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta\tau^*_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \delta\tau^*_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta\sigma^*_x \cos(n, x) + \delta\tau^*_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau^*_{xz} \cos(n, z) = \delta X_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сумма работ вариации напряжений и вариации внешних сил на действительных перемещениях в момент $t$ равна нулю

$$\iiint_V [\varepsilon^*_x(t)\,\delta\sigma^*_x(t) + \varepsilon^*_y(t)\delta\sigma^*_y(t) + \cdots + \gamma^*_{xz}(t)\delta\tau^*_{xz}(t)]\,dV =$$

$$= \iint_S [u^*(t)\,\delta X_n(t) + v^*(t)\,\delta Y_n(t) + w^*(t)\,\delta Z_n(t)]\,dS. \qquad (3)$$

Вводя функцию

$$U^*(t, \tau) = \frac{1}{2G}\left\{\frac{1}{2}\left[\sigma^*_x(t)\,\sigma^*_x(\tau) + \sigma^*_y(t)\sigma^*_y(\tau) + \sigma^*_z(t)\,\sigma^*_z(\tau) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\nu S^*(t) S^*(\tau)}{1+\nu}\right] + \tau^*_{xy}(t)\,\tau^*_{xy}(\tau) + \tau^*_{yz}(t)\,\tau^*_{yz}(\tau) + \tau^*_{xz}(t)\,\tau^*_{xz}(\tau)\right\} \qquad (4)$$

и используя зависимости (1), после преобразования получим

$$\varepsilon_x^*(t)\,\delta\sigma_x^*(t) + \varepsilon_y^*(t)\,\delta\sigma_y^*(t) + \cdots + \gamma_{xz}^*(t)\,\delta\tau_{xz}^*(t) =$$

$$= \delta\left\{U^*(t,t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t,\tau)\,Q\left[\sigma_i^*(\tau)\right] K(t,\tau)\,d\tau\right\}. \qquad (5)$$

Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\delta\iiint_V \left\{U^*(t,t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t,\tau)\,Q\left[\sigma_i^*(\tau)\right] K(t,\tau)\,d\tau\right\} dV =$$

$$= \iint_S \left[u^*(t)\,\delta X_n(t) + v^*(t)\,\delta Y_n(t) + w^*(t)\,\delta Z_n(t)\right] dS. \qquad (6)$$

Если внешние силы не варьируют, т. е. $\delta X_n = \delta Y_n = \delta Z_n = 0$, то

$$\delta\iiint_V \left\{U^*(t,t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t,\tau)\,Q\left[\sigma_i^*(\tau)\right] K(t,\tau)\,d\tau\right\} dV = 0. \qquad (7)$$

Полученное вариационное уравнение выражает начало Кастилиано для тел, материалы которых обладают свойством нелинейной ползучести.

Легко показать, что $\delta^2 U^*(t,t) \geqslant 0$, $\delta^2 U^*(t,\tau) = 0$, т. е. вторая вариация выражения в фигурных скобках (7) положительна. Следовательно, из всех статически возможных распределений напряжений, соответствующих данным внешним силам, в действительности имеет место то, при котором в момент $t$ потенциальная энергия тела имеет минимальное значение.

Формулы Кастилиано для рассматриваемой среды пишутся в виде

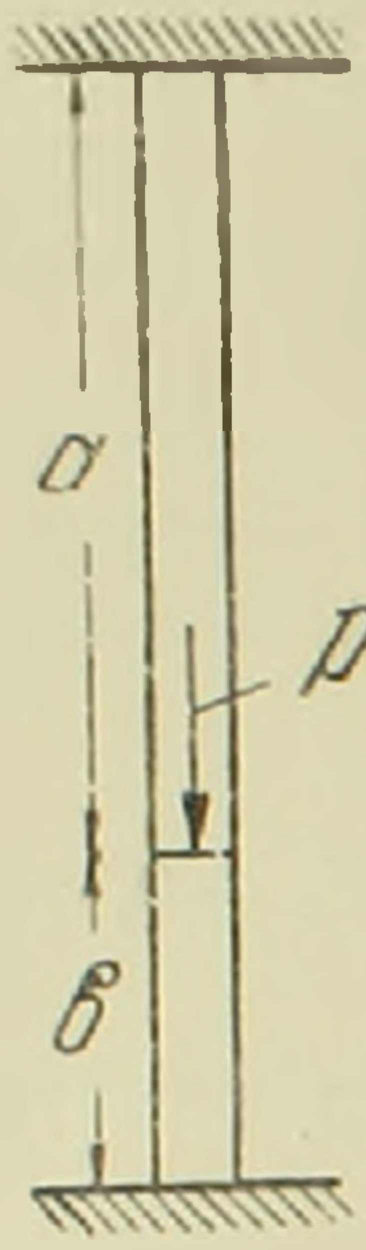
$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^*(t) &= \frac{\partial U^*(t,t)}{\partial\sigma_x^*(t)} - 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U^*(t,\tau)}{\partial\sigma_x^*(t)}\,Q\left[\sigma_i^*(\tau)\right] K(t,\tau)\,d\tau \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_{xy}^*(t) &= \frac{\partial U^*(t,t)}{\partial\tau_{xy}^*(t)} - 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U^*(t,\tau)}{\partial\tau_{xy}^*(t)}\,Q\left[\sigma_i^*(\tau)\right] K(t,\tau)\,d\tau \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (8)$$

Если в соотношениях (7)—(8) принять $Q = 1$, то получим соответствующие вариационные уравнения ([6]) линейной теории ползучести.

В случае стержневых систем, испытывающих только сжимающие и растягивающие усилия, уравнение (7) пишется в виде

$$\delta\sum_{k=1}^{m}\left\{\frac{S_k^2(t)\,l_k}{2EF_k} - \int_{\tau_0}^{t} \frac{S_k(t)\,l_k}{E}\,H\left[\frac{S_k(\tau)}{F_k}\right] K(t,\tau)\,d\tau\right\} = 0, \qquad (9)$$

где $S_k(t)$ — усилие в стержне в момент $t$, а $l_k$ и $F_k$ соответственно длина стержня и площадь сечения. Когда имеем $n$ раз статически неопределимые задачи, то для нахождения лишних неизвестных $X_1(t)$, $X_2(t), \cdots, X_n(t)$ получим систему $n$ нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра




Фиг. 1.

$$\frac{\partial}{\partial X_j(t)} \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{S_k^2(t)\, l_k}{2\, EF_k} - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_0}^{t} \frac{S_k(t)\, l_k}{E} H\left[\frac{S_k(\tau)}{F_k}\right] K(t, \tau)\, d\tau \right\} = 0 \qquad (10)$$

$$(j = 1, 2, \cdots, n).$$

Для иллюстрации применим уравнение (10) к простейшей статически неопределимой задаче. Стержень (фиг. 1) с глухо закрепленными концами находится под действием осевой силы $P(t)$, приложенной на расстоянии $a$ от верхней заделки. Определим характер изменения усилий во времени в соответствующих частях стержня. Мысленно устраним верхнюю заделку и приложим неизвестную реакцию $X(t)$. Из уравнения (10) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial X(t)} \left\{ \frac{aX^2(t)}{2EF} + \frac{b\,[P(t) - X(t)]^2}{2EF} - \int_{\tau_0}^{t} \left( \frac{aX(t)}{E} H_1\left[\frac{X(\tau)}{F}\right] + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{b\,[P(\tau) - X(\tau)]}{E} H_2\left[\frac{P(\tau) - X(\tau)}{F}\right] \right) K(t, \tau)\, d\tau \right\} = 0,$$

отсюда

$$X(t) = \frac{bP(t)}{l} + \int_{\tau_0}^{t} \left\{ \frac{Fa}{l} H_1\left[\frac{X(\tau)}{F}\right] - \frac{Fb}{l} H_2\left[\frac{P(\tau) - X(\tau)}{F}\right] \right\} K(t, \tau)\, d\tau. \qquad (11)$$

В качестве нулевого приближения примем $X_0(t) = \dfrac{bP(t)}{l}$, а затем

$$X_{i+1}(t) = \frac{bP(t)}{l} + \int_{\tau_0}^{t} \left\{ \frac{Fa}{l} H_1\left[\frac{X_i(\tau)}{F}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{Fb}{l} H_2\left[\frac{P(\tau) - X_i(\tau)}{F}\right] \right\} K(t, \tau)\, d\tau. \qquad (12)$$

Приложение метода последовательных приближений к подобным нелинейным интегральным уравнениям и его обоснование приведено в работах [2,3].

Когда $P(t) = P_0 = \text{const}$, первое приближение будет

$$X_1(t) = \frac{bP_0}{l} + \frac{EF}{l}\left[aH_1\left(\frac{bP_0}{Fl}\right) - bH_2\left(\frac{aP_0}{Fl}\right)\right]C(t, \tau_0), \tag{13}$$

где $C(t, \tau_0)$ — мера ползучести материала стержня.

Работа внешних сил на произведенных ими перемещениях $u^*(t)$, $v^*(t)$, $w^*(t)$ выражается интегралом

$$A(t) = \iiint_V \{\varepsilon_x^*(t)\, \sigma_x^*(t) + \varepsilon_y^*(t)\, \sigma_y^*(t) + \cdots + \gamma_{xz}^*(t)\, \tau_{xz}^*(t)\}\, dV.$$

Подставляя сюда компоненты деформаций из (1) и учитывая обозначение (4), находим

$$A(t) = 2\iiint_V \left\{U^*(t, t) - \int_{\tau_0}^{t} U^*(t, \tau)\, Q\,[\sigma_i^*(\tau)]\, K(t, \tau)\, d\tau\right\} dV. \tag{14}$$

Полученное выражение представляет собой формулу Клапейрона для рассматриваемой среды. При отсутствии свойства ползучести $[K(t, \tau) = 0$ или $t = \tau_0]$ оно совпадает с известной формулой Клапейрона для упругого тела.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

### Ոչ-գծային սողքի տեսության մի փոփոխակային հավասարման մասին

*Արտածված է Կաստիլիանոյի փոփոխակային հավասարումը այնպիսի նյութերի ոչ-գծային սողքի տեսության համար, ինչպիսիք են՝ բետոնը, պլաստմասսան, փայտը և այլն։ Գծային տեսության փոփոխակային հավասարումները բերված են մեր նախորդ հաղորդումներից մեկում (6)։*

*Մետաղներին վերաբերվող սողքի տեսության փոփոխակային հավասարումները տրվել են Լ. Մ. Կաչանովի կողմից իր մենագրության մեջ (1)։*

*Ոչ-գծային սողքի դեպքում լարումների և դեֆորմացիաների միջև ընդունված է (1) առնչությունը, որտեղ $\sigma_i^*$ շոշափող լարումների սաստկությունն է, Q տրված ֆունկցիա է, որը որոշվում է փորձից։ (1) առնչությունն ընդհանրացման արդյունք է մի կողմից՝ գծային սողքի տեսության եռաչափ խնդրի, իսկ մյուս կողմից՝ ոչ-գծային սողքի տեսության միաչափ դեպքի։*

*Փոփոխակենք լարվածային վիճակը որևէ մոմենտում։ Քանի որ լարումների և արտաքին ուժերի փոփոխակները կազմում են հավասարակշռված սիստեմ, ապա դրանց կատարած աշխատանքների գումարը իրական տեղափոխումներով t մոմենտում հավասար է զերոյի։ Ներմուծելով $U^*(t, \tau)$ ֆունկցիան (որը ներկայացնում է առաձգական պոտենցիալի արտահայտությունը, երբ $\tau = t$) ստանում ենք փնտրվող հավասարումը (8)։ Երբ լարումները փոփոխակելիս արտաքին ուժերը մնում են հաստատուն, Կաստիլիանոյի հավասարումը ընդունում է հետևյալ տեսքը՝*

$$\delta \iiint_V \left\{U^*(t, t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t, \tau)\, Q\,[\sigma_i^*(\tau)]\, K(t, \tau)\, d\tau\right\} dV = 0$$

*(8) կապակցությունները արտահայտում են Կաստիլիանոյի բանաձևերը ոչ-գծային սողքով օժտված միջավայրի համար։ Եթե (7)—(8) առնչություններում ընդունենք $Q \equiv 1$, ապա կստանանք գծային սողքի տեսության համապատասխան փոփոխակային հավասարումները (6)։*

Ձողային սիստեմների համար, երբ առաջիններն աշխատում են ձգման և սեղման, (7) հավասարումը գրվում է (9) տեսքով: Ստատիկորեն անորոշելի խնդիրներում ավելորդ անհայտները որոշվում են (10) ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարումների սիստեմից: Բերված է օրինակ (նկ. 1):

Կլայպերոնի բանաձևը արտաքին ուժերի աշխատանքի վերաբերյալ արտահայտվում է (14) բանաձևով:

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. М. Качанов*, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, 1949. [2] *Р. А. Александрян, Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. XXII, в. 6, 1958. [3] *М. И. Розовский*, „Изв. АН СССР“, ОТН, № 9, 1958. [4] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, Гостехиздат, 1952. [5] *П. И. Васильев*, „Изв. ВНИИГ“, т. 49, 1953. [6] *М. А. Задоян*, ДАН АрмССР, т. XXVI, № 5 (1958).