

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян и А. А. Баблоян

Кручение анизотропного цилиндра

(Представлено Н. Х. Арутюняном 18.X.1958)

Рассматривается задача о кручении круглого сплошного цилиндра, обладающего цилиндрической анизотропией частного вида, а именно, ось анизотропии совпадает с геометрической осью цилиндра, и все радиальные плоскости являются плоскостями упругой симметрии.

В данной работе скручивающая нагрузка задается на боковой поверхности цилиндра произвольным образом, а на торцах его — силами, приводящимися к двум моментам с векторами, параллельными оси z .

Будем пользоваться цилиндрической системой координат. Направим ось z по оси цилиндра.

Тогда решение задачи о кручении круглого цилиндра с анизотропией указанного вида, как показано С. Г. Лехницким ^(1,2), сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$, удовлетворяющей в области осевого сечения цилиндра уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - 2m \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + n^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{3m}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где

$$m = \frac{a_{46}}{a_{44}}, \quad n^2 = \frac{a_{66}}{a_{44}}, \quad (2)$$

a_{ij} — упругие постоянные,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44} \tau_{\theta z} + a_{46} \tau_{r\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = a_{46} \tau_{\theta z} + a_{66} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

v — перемещение в тангенциальном направлении, $\tau_{\theta z}$ и $\tau_{r\theta}$ скалывающие напряжения, выражающиеся через функцию $\Phi(r, z)$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \tau_{z\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Значения функции $\Phi(r, z)$ на торцах и боковой поверхности цилиндра задаются так, чтобы удовлетворились условия распределения скручивающей нагрузки

$$\left. \begin{aligned} -M_1 &= 2\pi \int_0^R r^2 \tau_{\theta z}(r, 0) dr \\ M_2 &= 2\pi \int_0^R r^2 \tau_{\theta z}(r, l) dr \\ \tau_{\theta r}(R, z) &= f(z), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где функция $f(z)$ кусочно непрерывна и имеет ограниченное изменение в интервале $(0, l)$.

Решение уравнения (1) может быть найдено по способу С. Г. Лехницкого ⁽¹⁾, переходя к новым переменным ρ и ξ , связанным со старыми зависимостями

$$\rho = r, \quad \xi = \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{3}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0. \quad (7)$$

Решениями этого уравнения являются следующие функции

$$\left. \begin{aligned} \rho^3 [AJ_2(\lambda\rho) + BY_2(\lambda\rho)] (C \operatorname{sh} \lambda\xi + D \operatorname{ch} \lambda\xi), \\ \rho^2 [AI_2(\lambda\rho) + BK_2(\lambda\rho)] (C \sin \lambda\xi + D \cos \lambda\xi), \\ \xi, \rho^4, \rho^4 \xi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $J_2(x)$, $Y_2(x)$ — функции Бесселя второго порядка, соответственно первого и второго рода, а $I_2(x)$ и $K_2(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента ⁽³⁾.

Для сплошного цилиндра решение уравнения (7) берем в виде

$$\Phi(\rho, \xi) = \rho^4 (A\xi + B) + \rho^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_2(\lambda_k \rho) \sin \lambda_k \xi \quad (9)$$

или в старых координатах:

$$\Phi(r, z) = r^4 [A(z + mr) + B] + r^2 \sum_{k=1}^{\infty} D_k I_2(\lambda_k r) \sin \lambda_k \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}. \quad (10)$$

Пользуясь соотношениями (4) и (10), для скалывающих напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ получим следующие выражения

$$\tau_{r\theta}(r, z) = -Ar^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_k \lambda_k}{\sqrt{n^2 - m^2}} I_2(\lambda_k r) \cos \lambda_k \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}, \quad (11)$$

$$\tau_{z\theta}(r, z) = r \{4[A(z + mr) + B] + Amr\} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \lambda_k \left[I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}} + \frac{m I_2(\lambda_k r)}{\sqrt{n^2 - m^2}} \cos \lambda_k \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}} \right]. \quad (12)$$

Представив функцию $f(z)$ в виде ряда Фурье

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k \frac{z + mR}{\sqrt{n^2 - m^2}} \quad -mR < z < l, \quad (13)$$

где

$$\lambda_k = \frac{k\pi \sqrt{n^2 - m^2}}{l + mR}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l + mR} \int_0^l f(z) dz, \\ a_k &= \frac{2}{l + mR} \int_0^l f(z) \cos \frac{k\pi(z + mR)}{l + mR} dz, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и удовлетворив условиям (5), для постоянных интегрирования получим следующие значения

$$\begin{aligned} A &= -\frac{a_0}{R^2}, \quad B = -\frac{M_2}{2\pi R^4} + a_0 \frac{l + mR}{R^2}, \\ D_k &= -\frac{a_k \sqrt{n^2 - m^2}}{\lambda_k I_2(\lambda_k R)}, \end{aligned} \quad (16)$$

а также следующее равенство

$$\frac{M_1 + M_2}{2\pi R^2} = a_0 l - \sqrt{n^2 - m^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k \frac{mR}{\sqrt{n^2 - m^2}}, \quad (17)$$

которое представляет собой уравнение равновесия сил, действующих на цилиндр.

Подставляя значения (16) в (11) и (12), для напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ получим следующие формулы

$$\tau_{r\theta}(r, z) = a_0 \frac{r^2}{R^2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{I_2(\lambda_k r)}{I_2(\lambda_k R)} \cos \lambda_k \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}, \quad (18)$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = r \left\{ \frac{4a_0}{R^2} [l - z + m(R - r)] - \frac{a_0 m r}{R^2} - \frac{2M_2}{\pi R^2} \right\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{I_2(\lambda_k R)} \left[m I_2(\lambda_k r) \cos \frac{\lambda_k(z + mr)}{\sqrt{n^2 - m^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{n^2 - m^2} I_1(\lambda_k r) \sin \frac{\lambda_k(z + mr)}{\sqrt{n^2 - m^2}} \right]. \quad (19)$$

В качестве численного примера рассмотрим кручение анизотропного цилиндра с размерами

$$\frac{l}{R} = \pi, \quad (20)$$

с коэффициентами анизотропии

$$a_{44} = \frac{1}{G_{\theta z}}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{r\theta}}, \quad a_{46} = \frac{\mu_{r\theta, \theta z}}{G_{\theta z}} = \frac{\mu_{\theta z, r\theta}}{G_{r\theta}}, \quad (21)$$

где $G_{\theta z}$ и $G_{r\theta}$ — модули сдвига для плоскостей, параллельных плоскостям θz и $r\theta$; $\mu_{r\theta, \theta z}$ и $\mu_{\theta z, r\theta}$ — коэффициенты угловой деформации первого рода, или „коэффициенты Ченцова“, где первые два индекса соответствуют направлениям сдвига, а вторые два — вызвавшим его касательным напряжениям.

Полагая материал цилиндра из древесины и принимая (*)

$$\frac{G_{\theta z}}{G_{r\theta}} = 2; \quad G_{\theta z} = 1 \times 10^4 \text{ кг/см}^2; \quad G_{r\theta} = 0,5 \times 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad (22)$$

а также

$$\mu_{r\theta, \theta z} = 0,6; \quad \mu_{\theta z, r\theta} = 0,3, \quad (23)$$

будем иметь

$$m = \frac{a_{46}}{a_{44}} = \mu_{r\theta, \theta z} = 0,6,$$

$$n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}} = \sqrt{2}. \quad (24)$$

Если цилиндр скручивается силами, приложенными на участках боковой поверхности

$$f(z) = \begin{cases} -p & z \leq l_1 = \frac{l}{4} \\ 0 & l_1 < z < l - l_1 \\ p & l - l_1 < z < l, \end{cases} \quad (25)$$

а торцы свободны от внешней нагрузки, тогда

$$M_1 = M_2 = a_0 = 0$$

$$a_k = \frac{2p}{k\pi} \left[(-1)^k \sin \frac{k\pi l_1}{l + mR} - 2 \sin \frac{k\pi l_1}{2(l + mR)} \cos \frac{k\pi(l_1 + 2mR)}{2(l + mR)} \right] \quad (26)$$

Такая задача для изотропного цилиндра была рассмотрена Л. файлоном (5).

В табл. 1 и 2 соответственно приведены некоторые значения напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$, подсчитанные по формулам (18) и (19) при значениях (24) и (26).

На фиг. 1 и 2 приводятся эпюры напряжений $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta z}$.

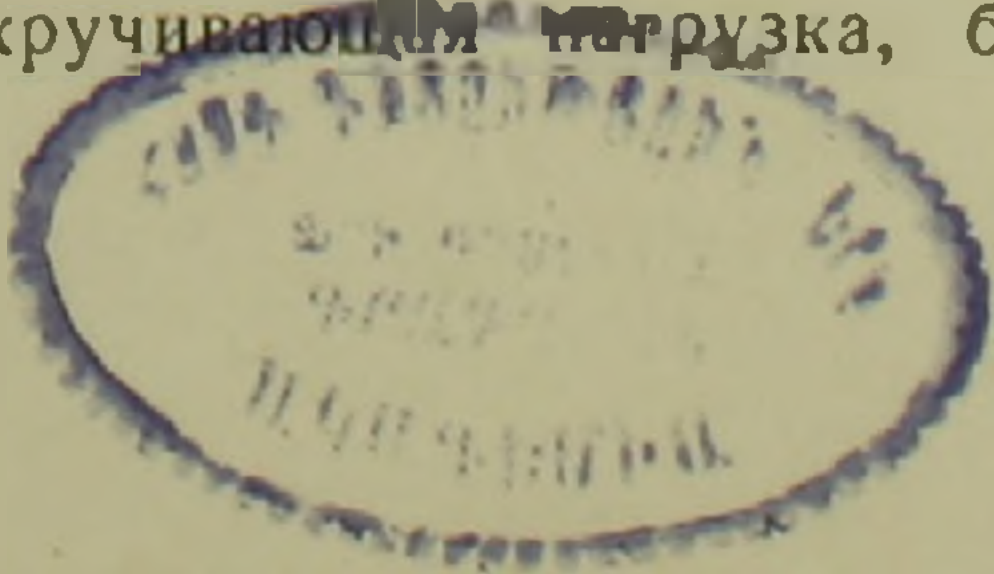
Таблица 1

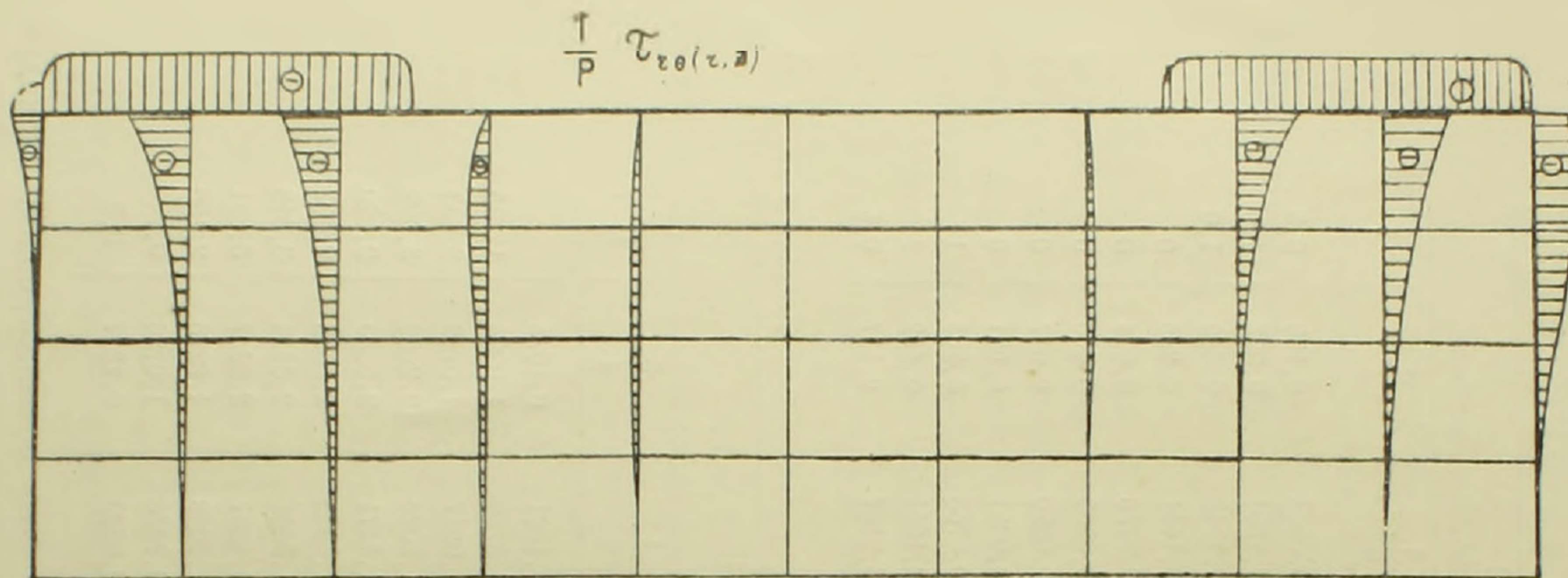
$\frac{\tau_{r\theta}(r, z)}{p}$					
p					
$\begin{matrix} r/R \\ z/l \end{matrix}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	-0,0149	-0,0615	-0,160	-0,5
0,1	0	-0,0240	-0,1201	-0,387	-1,0
0,2	0	-0,0352	-0,1643	-0,440	-1,0
0,3	0	-0,0372	-0,1431	-0,265	0
0,4	0	-0,0252	-0,0776	-0,074	0
0,5	0	-0,0134	-0,0263	-0,006	0
0,6	0	-0,0031	0,0020	0,017	0
0,7	0	0,0051	0,0321	0,081	0
0,8	0	0,0166	0,0765	0,285	1
0,9	0	0,0329	0,1661	0,482	1
1,0	0	0,0480	0,2167	0,537	0,5

Таблица 2

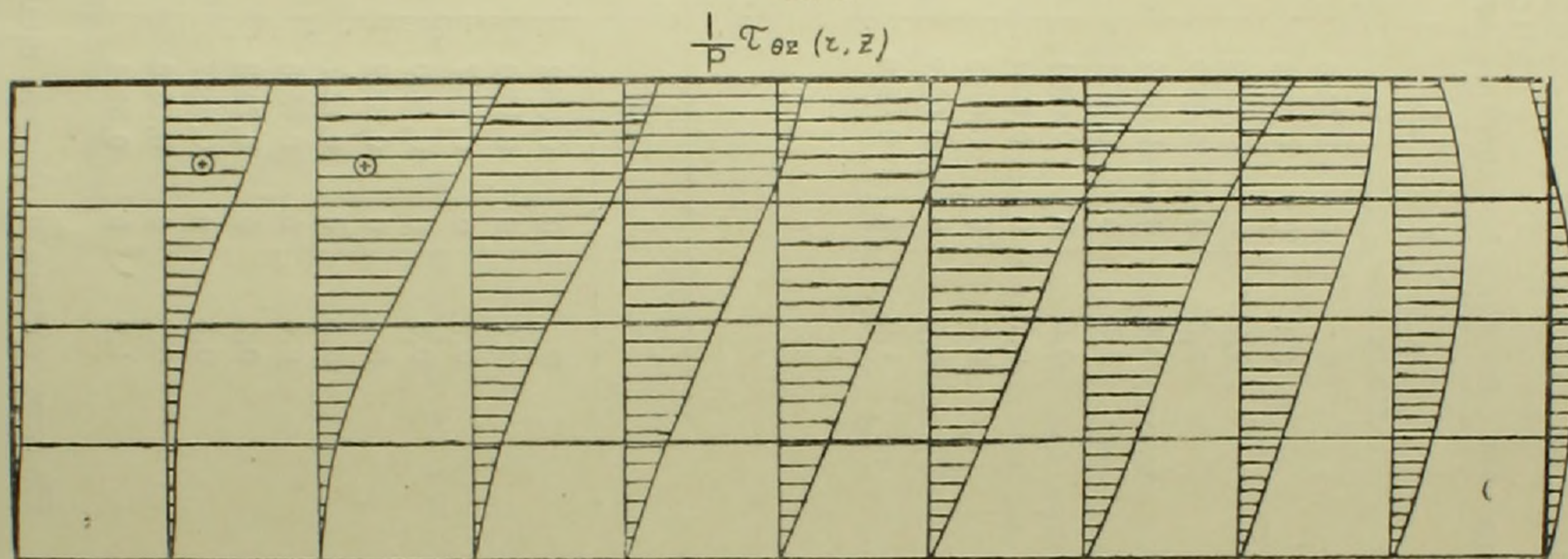
$\frac{\tau_{\theta z}(r, z)}{p}$					
p					
$\begin{matrix} r/R \\ z/l \end{matrix}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
0	0	0,0392	0,1301	0,1675	
0,1	0	0,1329	0,3789	1,0968	1,765
0,2	0	0,2857	1,0547	1,6719	3,033
0,3	0	0,4730	1,2023	2,2909	3,009
0,4	0	0,6299	1,4471	2,3855	2,920
0,5	0	0,7217	1,5295	2,3568	2,907
0,6	0	0,7546	1,5357	2,3414	3,648
0,7	0	0,7452	1,4857	2,2647	3,381
0,8	0	0,6597	1,3048	1,9270	2,156
0,9	0	0,5616	0,9538	1,0726	0,7
1,0	0	0,3114	0,4223	0,1227	-0,3

Из этих таблиц и фигур видно, что в анизотропном цилиндре также напряжения $\tau_{\theta r}$ по мере удаления от торцов цилиндра, вблизи которых приложена скручивающая нагрузка, быстро уменьшаются и стремятся к нулю.





Фиг. 1.



Фиг. 2

Однако распределение напряжений не симметрично у торцов цилиндра относительно среднего поперечного сечения цилиндра.

Распределение же напряжений τ_{20} в среднем поперечном сечении стержня приближается к линейному закону.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Բ. Լ. ԱՔՐԱԶԱՄՅԱՆ ԷՎ Ա. Ա. ԲԱՐԼՈՅԱՆ

Անիզոտրոպ գլանի ոլորումը

Հոդվածում դիտարկվում է հոծ, կլոր, մասնակի ձևով անիզոտրոպ գլանի ոլորման խնդիրը: Անիզոտրոպիայի առանցքը համընկնում է գլանի երկրաչափական առանցքի հետ և բոլոր ռադիալ հարթությունները հանդիսանում են առաձգական սիմետրիայի հարթություններ:

Գլանի ոլորող ուժերը նրա կողմնային մակերևույթի վրա տրվում են կամավոր կերպով, իսկ հիմքերի վրա՝ այնպիսի ուժերով, որոնք բերվում են գլանի առանցքին դուրս գալիս վեկտորներով երկու մոմենտներով:

Խնդիրը լուծվում է Ս. Գ. Լեխնիցկու^(1,2) կողմից առաջարկված եղանակով, որը թույլ է տալիս լարման ֆունկցիայի համար ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը լուծել Ֆուլլերի փոփոխականների անջատման եղանակով:

Լուծումն ստացվում է Ֆուլլերի ընդհանրացած շարքերով, որտեղ վերլուծությունների գործակիցներն արտահայտվում են Բեսսելի կեղծ արդումենտից կախված ֆունկցիաներով:

Դիտարկված թվային օրինակում վերցված է հոծ գլան, որը ոլորվում է միայն կողմնային մակերևույթի տարբեր մասերի վրա կիրառված ուժերով:

Գլանի առանցքային կտրվածքի տարրեր կետերի համար հաշվված են լարումները՝ հաշվումները կատարված են ենթադրելով, որ գլանը փայտից է: Փայտի առաձգական գործակիցները վերցված են Ա. Ն. Միտինսկու⁽³⁾ աշխատությունից: Լարումների համար կազմված են աղյուսակներ և էպյուրներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Госиздат технико-теоретической лит., стр. 250, М.—Л., 1950. ² С. Г. Лехницкий, ПММ, том IV, вып. 3, 1940. ³ Э. Грей и Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, Госиноиздат, М., 1953. ⁴ А. Н. Митинский, Упругие постоянные древесины, как ортотропного материала, Труды лесотехнической академии имени С. М. Кирова, № 63, Ленинград, 1948. ⁵ Л. Файлон, (L. N. G. Filon) .On the Elastic Equilibrium of Circular Cylinders under Certain Practical Systems of Load*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. „A“, Vol. 198, 1902, pp. 147—233.