ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVII 1958 4

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян и А. Б. Нерсесян

Некоторые интегро-дифференциальные операторы и разложения в ряды, аналогичные рядам Шлёмильха

(Представлено М. М. Джрбашяном 7. X. 1958)

Известно (¹), что из данной биортогональной системы

$$\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}, \quad x \in (a, b), \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

можно получить новые биортогональные системы, используя операторы дробного интегрирования Римана-Лиувилля

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(x-a)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(b-x)^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt$$

$\alpha > 0$, $x \in (a, b)$ и аналог формулы интегрирования по частям

$$\int_a f(x) \frac{d^{-\alpha}}{d(x-a)^{-\alpha}} g(x)\, dx = \int_a^b g(x) \frac{d^{-\alpha}}{d(b-x)^{-\alpha}} f(x)\, dx.$$

В настоящей статье рассматриваются операторы несколько иного вида, с помощью которых также можно из известных биортогональных систем получить новые. В частности, из известной ортонормальной системы функций Бесселя получаются биортогональные системы, аналогичные биортогональной системе Шлёмильха(²).

1°. Пусть $0 \leqslant \alpha < 1$, $x \in (a, b)$, $f(x)$ непрерывна на (a, b).

Рассмотрим следующие операторы:

$$L^{+}_{\alpha, a} f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1}\, t f(t)\, dt, \tag{1.1'}$$

$$L^{-}_{\alpha, b} f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^2 - x^2)^{\alpha-1}\, t f(t)\, dt, \tag{1.1''}$$

$$M^{+}_{\alpha, a} f(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x^2 - t^2)^{-\alpha} t f(t)\, dt, \qquad (1.2')$$

$$M^{-}_{\alpha, b} f(x) = -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (t^2 - x^2)^{-\alpha} t f(t)\, dt. \qquad (1.2'')$$

Легко проверить, что если вышеуказанные операции существуют, то

$$L^{+}_{\alpha, a} M^{+}_{\alpha, a} f(x) \equiv f(x);\; L^{-}_{\alpha, b} M^{-}_{\alpha, b} f(x) \equiv f(x),$$

$$M^{+}_{\alpha, a} L^{+}_{\alpha, a} f(x) \equiv f(x);\; M^{-}_{\alpha, b} L^{-}_{\alpha, b} f(x) \equiv f(x),$$

$$\lim_{\alpha \to +0} M^{+}_{\alpha, a} f(x) = \lim_{\alpha \to +0} M^{-}_{\alpha, b} f(x) = \lim_{\alpha \to +0} L^{+}_{\alpha, a} f(x) =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} L^{-}_{\alpha, a} f(x) = f(x) \qquad (1.3)$$

для $x \in (a, b)$.

Пусть $g(x)$ такова, что к ней можно применять вышеуказанные операции. Умножая (1.1′) на $xg(x)$, интегрируя от a до b и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\int_a^b xg(x) L^{+}_{\alpha, a} f(x)\, dx = \int_a^b xf(x) L^{-}_{\alpha, b}\, g(x)\, dx. \qquad (1.4')$$

Из (1.4′) можно получить также, принимая во внимание (1.3):

$$\int_a^b xg(x) M^{+}_{\alpha, a} f(x)\, dx = \int_a^b xf(x) M_{\alpha, b} g(x)\, dx. \qquad (1.4'')$$

Формулы (1.4′) и (1.4″) дают возможность из данной биортогональной системы $\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}$ получать новые.

Действительно, пусть $\{\varphi_n(x), \psi_n(x)\}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ биортогональная на (a, b) система. Тогда

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, \psi_m(x)\, dx = \delta_{n, m},$$

где $\delta_{n, m}$ — символ Кронекера.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$, заданные на (a, b), таковы, что существуют и непрерывны следующие функции

$$\Phi_n(x) = v(x) L^{+}_{\alpha, a} \left\{ \frac{u(x)}{x} \varphi_n(x) \right\}, \qquad (1.5')$$

$$\Psi_n(x) = \frac{x}{v(x)} M^{-}_{\alpha, b} \left\{ \frac{\psi_n(x)}{u(x)} \right\}, \qquad (1.5'')$$

$$0 \leqslant \alpha < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Полученная система $\{\Phi_n(x), \Psi_n(x)\}$, $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ биортогональна на (a, b).

Действительно, учитывая формулы (1.3) и (1.4), получим

$$\int_a^b \Phi_n(x)\Psi_m(x)\,dx = \int_a^b x L^{+}_{\alpha, a}\left\{\frac{u(x)}{x}\varphi_n(x)\right\} M^{-}_{\alpha, b}\left\{\frac{\psi_m(x)}{u(x)}\right\} dx =$$

$$= \int_a^b x\,\frac{u(x)}{x}\varphi_n(x)\, L^{-}_{\alpha, b} M^{-}_{\alpha, b}\,\frac{\psi_m(x)}{u(x)}\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \delta_{n, m}\,; \quad (n, m = 0\ 1,\ 2, \cdots).$$

Аналогично, если обозначим

$$\Phi^{*}_n(x) = v(x)\, M^{+}_{\alpha, a}\left\{\frac{u(x)}{x}\varphi_n(x)\right\}, \tag{1.6'}$$

$$\Psi^{*}_n(x) = \frac{x}{v(x)}\, L^{-}_{\alpha, b}\left\{\frac{\psi_n(x)}{u(x)}\right\}, \tag{1.6''}$$

то на основании (1.3) и (1.4′) получим

$$\int_a^b \Phi^{*}_n(x)\,\Psi^{*}_m(x)\,dx = \int_a^b \varphi_n(x)\,\psi_m(x)\,dx = \delta_{n, m}$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \cdots),$$

т. е. система $\{\Phi^{*}_n(x), \Psi^{*}_n(x)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ также биортогональна на (a, b).

Применим вышеуказанный метод к известной ортогональной с весом $p(x) = x$ на $(0, 1)$ системе функций Бесселя $\{J_\nu(j_{n,\nu}x)\}$ $(n = 1, \cdots)$, где $j_{n,\nu}$ — положительные корни функции $J_\nu(z)$, расположенные порядке возрастания.

Как известно,

$$\frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})}\int_0^1 xJ_\nu(j_{n,\nu}x)\,J_\nu(j_{m,\nu}x)\,dx = \delta_{n, m}\,. \tag{1.7}$$

Принимая в формулах (1.5) $\varphi_n(x) = xJ_\nu(j_{n,\nu}x)$ и $\psi_n(x) = \dfrac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})}$ $J_\nu(j_{n,\nu}x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $u(x) = x^\nu$, $v(x) = 1$, получим

$$\Phi_n(x) = L^{+}_{\alpha, 0}\{x^\nu J_\nu(j_{n,\nu}x)\}, \tag{1.8'}$$

$$\Psi_n(x) = \frac{2x}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})} M^-_{\alpha,1}\{x^{-\nu} J_\nu(j_{n,\nu} x\} \tag{1.8''}$$

$$(n = 1,\ 2, \cdots).$$

Легко проверить, что при $\operatorname{Re}\lambda > -2$

$$L^+_{\alpha,0} x^\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1+\alpha\right)} x^{\lambda+2\alpha} \quad (\alpha > 0) \tag{1.9'}$$

и при $\operatorname{Re}\lambda > 2\alpha - 2$

$$M^+_{\alpha,0} x^\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1-\alpha\right)} x^{\lambda-2\alpha}. \tag{1.9''}$$

Из (1.8′), имея в виду (1.9′), получим

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{j_{n,\nu}}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} L^+_{\alpha,0} x^{2\nu+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{j_{n,\nu}}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \cdot \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+\alpha+1)} x^{2\nu+2\alpha+2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{j_{n,\nu}}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+\alpha+1)} x^{2(\nu+\alpha)+2k} =$$

$$= \left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^\alpha x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu} x).$$

Таким образом, имеем

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^\alpha x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu} x), \tag{1.10'}$$

$$\Psi_n(x) = -\frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})} \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^1 (t^2 - x^2)^{-\alpha} t^{1-\nu} J_\nu(j_{n,\nu} t)\, dt$$

$$0 \leqslant \alpha < 1,\ x \in (0,\ 1),\ (n = 1,\ 2, \cdots). \tag{1.10''}$$

Аналогично в этом случае биортогональная система (1.6) примет вид

$$\Phi_n^*(x)=\left(\frac{j_{n,\nu}}{2}\right)^{\alpha}x^{\nu-\alpha}J_{\nu-\alpha}(j_{n,\nu}x), \tag{1.11'}$$

$$\Psi_n^*(x)=\frac{4x}{J_{\nu+1}^2(j_{n,\nu})}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_x^1(t^2-x^2)^{\alpha-1}t^{1-\nu}J_\nu(j_{n,\nu}t)\,dt,$$

$$0\leqslant\alpha<\min\left\{\nu+\frac{1}{2},\ 1\right\};\quad x\in(0,\ 1),\ (n=1,\ 2,\cdots). \tag{1.11''}$$

В случае, когда $\nu=\frac{1}{2}$, из (1.10′) имеем

$$\Phi_n(x)=\left(\frac{2}{\pi n}\right)^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}+\alpha}J_{\frac{1}{2}+\alpha}(n\pi x).$$

Как известно, разложение по этой системе есть обобщенный ряд Шлёмильха([2]).

2°. Теперь мы рассматриваем разложения по полученным биортогональным системам (1.10).

Скажем, что $g(x)\in\ni\{(0,\Delta)\}$, если $g(x)$, заданная на (0, 1), такова, что

$$x^{\frac{1}{2}}g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{\frac{1}{2}}J_\nu(j_{n,\nu}x) \tag{2.1}$$

равномерно на каждом отрезке $[0,\delta]\subset[0,\Delta)$, где

$$a_n=\frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_{n,\nu})}\int\limits_0^1 xg(x)J_\nu(j_{n,\nu}x)\,dx$$

$$\left(\nu+\frac{1}{2}\geqslant0\right). \tag{2.2}$$

Это имеет место, если, например:

а) $x^{-\frac{1}{2}}g(x)$ имеет ограниченное полное изменение на

$$(0,\Delta)\quad(0<\Delta<1),$$

б) $x^{-\nu}g(x)$ непрерывна в интервале $(0,\Delta)$,

в) $\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}g(x)dx$ существует и абсолютно сходится (см. ([1]), гл. XVIII).

Имея в виду формулы (1.10′), в силу равномерной сходимости ряда (2.1), получим формулу:

$$L^{+}_{\alpha,0}x^{\nu}g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n L^{+\prime}_{\alpha,0}x^{\nu}J_{\nu}(j_{n,\nu}x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^{\alpha}x^{\nu+\alpha}J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu}x). \tag{2.3}$$

Далее, на основании формул (1.3) и (1.4′), из (2.2) получим

$$a_n=\frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})}\int_0^1 tg(t)J_{\nu}(j_{n,\nu}t)\,dt=$$

$$=\frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})}\int_0^1 tg(t)t^{\nu}L^{-}_{\alpha,1}M^{-}_{\alpha,1}t^{-\nu}J_{\nu}(J_{n,\nu}t)\,dt=$$

$$=\frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_{n,\nu})}\int_0^1 t\,[L^{+}_{\alpha,0}t^{\nu}g(t)]\,[M^{-}_{\alpha,1}t^{-\nu}J_{\nu}(j_{n,\nu}t)]\,dt=$$

$$=\int_0^1 [L^{+}_{\alpha,0}t^{\nu}g(t)]\Psi_n(t)\,dt, \tag{2.4}$$

где $\Psi_n(t)$ определяется из формулы (1.10″).

Таким образом, имеет место

Теорема. Пусть функция $f(x)$, *заданная на* (0, 1), *такова, что* $x^{-\nu}M^{+}_{\alpha,0}f(x)\in\sigma\{(0,\Delta)\}$, *тогда, если*

$$a_n=\int_0^1 f(t)\Psi_n(t)\,dt\quad(n=1,2,\cdots),$$

где $\Psi_n(t)$ *определяется из формулы* (1.10″), *то*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^{\alpha}x^{\nu+\alpha}J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu}x).$$

$(0\leqslant\alpha<1)$ *равномерно на* $[0,\delta]\subset[0,\Delta)$.

Замечание. Условия теоремы удовлетворяются, если, например, $f(x)$ имеет ограниченную производную p-го порядка, где

$$p\geqslant\left[\alpha+\nu-\frac{1}{2}\right].$$

Нетрудно видеть, что аналогичная теорема, при несколько больших ограничениях, имеет место и для биортогональной системы (1.11).

В заключение заметим, что при помощи вышеуказанного метода можно получить аналогичное обобщение рядов Дини, но на этом останавливаться мы не будем.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ ԵՎ Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

Որոշ ինտեգրո-դիֆերենցիալ օպերատորներ և շարքերի վերածում նման Շլեմիլխի շարքերին

Ներկա հոդվածում որոշ ինտեգրալ և ինտեգրո-դիֆերենցիալ օպերատորների օգնությամբ հայտնի բիօրթոգոնալ սիստեմներից ստացվում են նոր բիօրթոգոնալ սիստեմներ։

Մասնավորապես, ստացվում է, որ $\{J_\mu(j_{n,\nu})\}$, $(n=1, 2, \ldots)$ $\mu > \nu$ Բեսսելի առաջին սեռի ֆունկցիաների սիստեմը, որտեղ $j_{n,\nu}$ թվերը $J_\nu(z)$ ֆունկցիայի զրոներն են՝ դասավորված աճման կարգով, բիօրթոգոնալ է (1.10″) բանաձևով որոշվող $\{\Psi_n(x)\}$ սիստեմի հետ (0, 1) ինտերվալում։

Եթե (0, 1) ինտերվալում տրված $f(x)$ ֆունկցիան բավարարում է որոշ պայմանների, ապա տեղի ունի

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{2}{j_{n,\nu}}\right)^{\alpha} x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_{n,\nu} x)$$

վերածումը հավասարաչափ $[0, \delta) \subset [0, \Delta)$ $(0 < \Delta < 1)$, որտեղ a_n գործակիցները որոշվում են

$$a_n=\int_0^1 f(t)\,\Psi_n(t)\,dt$$

բանաձևով։

$\nu=\frac{1}{2}$ դեպքում $f(x)$-ը վերածվում է Շլեմիլխի հայտնի շարքի։

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_\mu(\pi n x$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Erdelyi*, On some biorthogonal sets of functions. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, Vol. 11, No. 40, 1940. [2] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ч. I, М., 1949.