ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVII 1958 4

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

О разложении и дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала

(Представлено А. Л. Шагиняном 20. V. 1958)

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + q(x, y)\, u = \lambda u \tag{1}$$

во всем двумерном пространстве E_2. Предположим, что $q(x, y)$ действительная непрерывная функция и при $r = \{x^2 + y^2\}^{1/2} \to \infty$

$$q(x, y) \to +\infty. \tag{2}$$

Известно, что при выполнении условия (2) уравнение (1) имеет чисто точечный спектр, причем собственные значения неограниченно растут и имеют единственную предельную точку на бесконечности. Так как функция $q(x, y)$ ограничена снизу, то

во-первых, можно предполагать $q(x, y) > 0$, так как это предположение влечет за собой замену в λ;

во-вторых, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр уравнения (1) неотрицателен. В самом деле, при таком предположении относительно функции $q(x, y)$, как известно, отрицательный спектр уравнения (1) снизу ограничен и поэтому можно подобрать число η так, чтобы спектр уравнения

$$-\Delta u + q(x, y)\, u = (\lambda + \eta)\, u$$

оказался неотрицательным.

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2, \cdots$ собственные значения, а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y), \cdots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции уравнения (1).

В работе [1] Б. М. Левитаном было изучено разложение функций с интегрируемым квадратом по собственным функциям уравнения (1), а нами в работе [2] — дифференцирование этих разложений.

Если при $r \to \infty$ $q(x, y) \to +\infty$, то собственные функции $\varphi_n(x, y)$ на бесконечности экспоненциально убывают, и поэтому для построения ряда Фурье нет нужды предполагать, что разлагаемая функция имеет интегрируемый квадрат.

В настоящей заметке, используя одну асимптотическую формулу для распределения собственных значений уравнения (1), доказанную нами в работе[3], мы изучаем вопросы как разложения, так и дифференцирования разложений по собственным функциям уравнения (1) функций, растущих на бесконечности как многочлен. Вопросы разложения в одномерном случае изучены Е. С. Титчмаршом[4], а трехмерный случай — Б. М. Левитаном[5].

Результаты настоящей работы выражаются в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть функция $q(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. *при* $r \leqslant 1$

$$|q(x+r\cos\vartheta, y+r\sin\vartheta) - q(x, y)| < Ar\{q(x, y)\}^a,$$

где A и a — некоторые константы, причем $0 < a < \frac{3}{2}$,

2°. *при* $r > 1$

$$q(x+r\cos\vartheta, y+r\sin v) < C\exp\left\{\frac{1}{2}r\sqrt{q(x, y)}\right\},$$

где C — некоторое постоянное число,

3°. *существуют такие константы $B > 0$, $\delta > 0$, что для достаточно больших $r = \{x^2+y^2\}^{1/2}$ выполняется неравенство*

$$q(x, y) > Br^\delta.$$

Пусть для некоторого $\tau \geqslant 0$ функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^2(x, y)}{q^\tau(x, y)} dxdy < \infty. \tag{3}$$

Положим

$$c_n = \int\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\varphi_n(x, y)\,dxdy.$$

Тогда в каждой точке непрерывности (x_0, y_0) функции $f(x, y)$ имеет место равенство $\left(s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2}\right)$

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\mu_n<\mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n\varphi_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \tag{*}$$

т. е. средние по Риссу порядка $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2}$ *разложения функции* $f(x, y)$ *по собственным функциям оператора Шредингера, заданного во всем двумерном пространстве, в точке* (x_0, y_0) *стремятся к значению* $f(x_0, y_0)$.

Равенство (*) *имеет место равномерно в каждой конечной части пространства* E_2.

Замечание. Положим $(\tau \geqslant 0)$

$$a_n^{(\tau)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int q^{\tau}(x, y)\, \varphi_n^2(x, y)\, dxdy. \tag{4}$$

Если функция $q(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, в работе([3]) мы вывели следующую асимптотическую формулу:

$$\sum_{\mu_n^2 < \lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{(x, y) < \lambda} q^{\tau}(x, y)\, \{\lambda - q(x, y)\}\, dxdy, \quad (\lambda \to \infty).$$

Исходя из этой формулы, там же мы получили следующую оценку [см. ([3]), оценка (30)]:

$$\sum_{\mu < \mu_n \leqslant \mu + 1} a_n^{(\tau)} = O\,(\mu^{2\tau + 4/\delta + 2}), \quad (\mu \to \infty). \tag{5}$$

Далее, в работе([1]) Б. М. Левитаном получена оценка (см. лемму 2, § 1):

$$\sum_{\mu < \mu_n \leqslant \mu + 1} \varphi_n^2(x, y) = O\,(\mu), \quad (\mu \to \infty). \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Мы имеем

$$|c_n| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{|f(x, y)|}{q^{\frac{\tau}{2}}(x, y)} \cdot |\varphi_n(x, y)|\, q^{\frac{\tau}{2}}(x, y)\, dxdy.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского отсюда следует

$$|c_n| \leqslant \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \frac{f^2(x, y)}{q^{\tau}(x, y)}\, dxdy \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \varphi_n^2(x, y)\, q^{\tau}(x, y)\, dxdy \right\}^{1/2}. \tag{7}$$

Из (3), (4) и (7) следует оценка

$$|c_n| \leqslant C\, |a_n^{(\tau)}|^{1/2}. \tag{8}$$

Далее, при фиксированных x и y, в силу неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\left|\sum_{\mu\leqslant\mu_n<\mu+1} c_n\varphi_n(x, y)\right| \leqslant \left\{\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1} c_n^2\right\}^{1/2}\cdot\left\{\sum_{\mu\leqslant\mu_n<\mu+1}\varphi_n^2(x, y)\right\}^{1/2}. \tag{9}$$

Тогда, в силу оценок (5) и (6), учитывая (8), из (9) получим важную оценку ($\mu\to\infty$)

$$\sum_{\mu<\mu_n\leqslant\mu+1}{}' |c_n\varphi_n(x, y)| = 0\left(\mu^{\tau+2/\delta+\frac{3}{2}}\right). \tag{10}$$

Пусть $g_\varepsilon(t)$ четная, бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Положим

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\cos\mu t\,dt, \quad S(x, y; \mu) = \sum_{\mu_n<\mu} c_n\varphi_n(x, y).$$

Как показано в работе ([1]), имеет место тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\varepsilon(\mu)\,d_\mu R(x, y; \mu) = 0, \tag{11}$$

где

$$R(x, y; \mu) = S(x, y; \mu) - \alpha_1(x, y; \mu) - \beta_1(x, y; \mu);$$

$$\alpha_1(x, y; \mu) = \int_0^\mu \nu^2\alpha(x, y; \nu)\,d\nu; \quad \alpha(x, y; \nu) = \int_0^1 g(x, y; t)\cos\nu t\,dt;$$

$$g(x, y; t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}<t}\frac{f(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2-(\xi^2+\eta^2)}}\,d\xi\,d\eta;$$

$$\beta_1(x, y; \mu) = \frac{2}{\pi}\int_0^\mu \nu^2\beta(x, y; \nu)\,d\nu;$$

$$\beta(x, y; \nu) = \int_0^1 h(x, y; t)\cos\nu t\,dt;$$

$$h(x, y; t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t ds\iint\limits_{\sqrt{\xi^2+\eta^2}<s} w(x, y, \xi, \eta; s)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

(об определении функции $w(x, y, \xi, \eta; s)$ [см. работу([1])].

Из оценки (10) следует оценка ($\mu\to\infty$)

$$\overset{\mu+1}{\underset{\mu}{V}}\{R(x, y; \nu)\} = O\left(\mu^{\tau+2/\delta-\frac{3}{2}}\right). \qquad (12)$$

В силу оценки (12) на основании теоремы 1.3. 3 работы[6] из тождества (11) следует, что средние по Риссу порядка $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2}$ функции $R(x, y; \mu)$ стремятся к нулю равномерно в каждой конечной части двумерного пространства E_2, т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu R(x, y; \nu) = 0. \qquad (13)$$

Далее, исходя из определений функций $\alpha_1(x, y; \mu)$ и $\beta_1(x, y; \mu)$, нетрудно показать, что

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu \alpha_1(x, y; \nu) = f(x, y), \qquad (14)$$

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^{\mu}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu \beta_1(x, y; \nu) = 0. \qquad (15)$$

Поэтому утверждение теоремы следует из равенств (13), (14) и (15). Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. Пусть функции $q(x, y)$ и $f(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того, в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha - 1$ включительно, а функция $f(x, y)$ — непрерывные частные производные до порядка α включительно. Тогда для $\left(s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2} + \alpha\right)$ имеет место равенство

$$\lim_{\mu\to\infty}\sum_{\mu_n<\mu}\left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \frac{\partial^\alpha \varphi_n(x_0, y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}} = \frac{\partial^\alpha f(x_0, y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}, \qquad (**)$$

т. е. средние по Риссу порядка $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2} + \alpha$ продифференцированнных разложений порядка α функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера, заданного во всем двумерном пространстве, в точке (x_0, y_0) стремятся к значению

$$\frac{\partial^\alpha f(x_0, y_0)}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Равенство (**) имеет место равномерно в каждой конечной части двумерного пространства E_2.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогичным образом. Только здесь вместо оценки (6) следует пользоваться оценкой (4) работы[7].

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության և վերլուծության դիֆերենցման մասին անսահմանափակ աճող պոտենցիալի դեպքում

Դիտարկենք

$$-\Delta u + q(x, y)\, u = \lambda u \tag{1}$$

հավասարումը ամբողջ երկչափ տարածության մեջ։ Ենթադրենք, որ $q(x, y)$ ֆունկցիան իրական է և անընդհատ։ Դիցուք, երբ $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to \infty$

$$q(x, y) \to +\infty. \tag{2}$$

Հայտնի է, որ եթե տեղի ունի (2) պայմանը, ապա (1) հավասարման սպեկտրը կետային է, սեփական արժեքներն անսահմանափակ աճում են և ունեն միակ սահմանային կետ անվերջում։ Բացի այդ, քանի որ $q(x, y)$ ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է, ապա առանց ընդհանրության խախտելու կարելի է ենթադրել, որ (1) հավասարման սպեկտրը բացասական չէ։ Նշանակենք $\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n \cdots$-ով (1) հավասարման սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x, y), \varphi(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y) \cdots$-ով՝ համապատասխան օրթոնորմավորված սեփական ֆունկցիաները։

Երբ (2) պայմանը բավարարված է, ապա սեփական ֆունկցիաները անվերջին մոտենալիս էքսպոնենցիալ կերպով նվազում են և այդ պատճառով Ֆուրյեի շարքը կառուցելիս հարկ չկա վերածվող ֆունկցիայից պահանջել քառակուսու ինտեգրելիություն։ Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է ըստ (1) հավասարման սեփական ֆունկցիաների վերածման և վերլուծության դիֆերենցման հարցերը, երբ վերածվող ֆունկցիան անվերջում աճում է ինչպես բազմանդամ։ Նույն հարցը միաչափ և եռաչափ տարածությունների մեջ ուսումնասիրվել է Ե. Ս. Տիտչմարշի և Բ. Մ. Լևիտանի կողմից համապատասխանաբար։ Հոդվածում ապացուցվում են հետևյալ երկու թեորեմները։

Թեորեմ 1. Դիցուք $q(x, y)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1°. երբ $r < 1$

$$|q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) - q(x, y)| < Ar\{q(x, y)\}^a,$$

որտեղ A և a հաստատուններ են, ըստ որում $0 < a < \frac{3}{2}$։

2°. Երբ $r > 1$

$$q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) < C\exp\left\{\frac{1}{2} r\sqrt{q(x, y)}\right\},$$

որտեղ C ինչ որ հաստատուն է։

3°. գոյություն ունեն այնպիսի $B>0$ և $\delta>0$ հաստատուններ, որ բավականաչափ մեծ է $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$-ի համար

$$q(x, y) > Br^{\delta}:$$

Դիցուք ինչ որ $\tau \geqslant 0$-ի համար $f(x, y)$ ֆունկցիան բավարարում է այսպիսի պայմանի՝

$$\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{f^2(x, y)}{q^{\tau}(x, y)}\, dxdy < \infty:$$

Նշանակենք

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(x, y)\, \varphi_n(x, y)\, dxdy:$$

Այդ դեպքում $f(x, y)$ ֆունկցիայի անընդհատության ամեն մի (x_0, y_0) կետում

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \varphi_n(x_0, y_0) = f(x_0, y_0), \tag{3}$$

որտեղ $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2}$, այսինքն $f(x, y)$ ֆունկցիայի ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության Ռիսսի $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2}$ -րդ կարգի միջինները (x_0, y_0) կետում ձգտում են $f(x_0, y_0)$ արժեքին:

(3) հավասարությունը տեղի ունի հավասարաչափ երկչափ տարածության ամեն մի վերջավոր մասում:

Թեորեմ 2. Դիցուք $q(x, y)$ և $f(x, y)$ ֆունկցիաները բավարարում են նախորդ թեորեմի պայմաններին և բացի այդ (x_0, y_0) կետի մի որևէ շրջակայքում $q(x, y)$ ֆունկցիան ունի մինչև $\alpha - 1$-րդ կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ, իսկ $f(x, y)$ ֆունկցիան՝ մինչև α-րդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ: Այդ ենթադրությունների դեպքում, երբ $s > \tau + \frac{2}{\delta} + \frac{3}{2} + \alpha$ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \frac{\partial^{\alpha} \varphi_n(x_0, y_0)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} = \frac{\partial^{\alpha} f(x_0, y_0)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha),$$

այսինքն $f(x, y)$ ֆունկցիայի ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության α-րդ կարգի ածանցյալների Ռիսսի $s > \tau + 2/\delta + \frac{3}{2} + \alpha$-րդ կարգի միջինները (x_0, y_0) կետում ձգտում են $f(x, y)$ ֆունկցիայի α-րդ կարգի ածանցյալի արժեքին նույն կետում:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. М. Левитан*, Труды Московского математического общества, т. IV (1955). [2] *И. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. XXVI, № 4 (1958). [3] *И. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. XXVII, № 3 (1958). [4] *Е. С. Титчмарш*, Quart. J. Math., 2-nd ser., 5, 17 (1954). [5] *Б. М. Левитан*, ДАН СССР, т. 103, № 2 (1955). [6] *Б. И. Левитан*, Математический сборник, 35 (77), 2 (1954). [7] *И. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. XXVI, № 3 (1958).