ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVII 1958 3

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Об одной асимптотической формуле распределения собственных значений оператора Шредингера в двумерном пространстве

(Представлено А. Л. Шагиняном 10. V. 1958)

Обозначим через $q(x, y)$ функцию, действительную и непрерывную во всем двумерном пространстве E_2. Пусть при $r = \{x^2 + y^2\}^{1/2} \to \infty$ функция $q(x, y) \to +\infty$.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0. \tag{1}$$

Известно, что если функция $q(x, y)$ удовлетворяет вышеуказанному условию, то уравнение имеет чисто точечный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственные значения уравнения (1), а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots \varphi_n(x, y), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции. Далее, обозначим через $N(\lambda)$ число собственных значений уравнения (1), которые меньше данного числа λ, т. е. положим

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1.$$

Впервые асимптотическое поведение функции $N(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ изучалось в работе Уэта и Мандля ([1]). Накладывая на функцию $q(x, y)$ некоторые жесткие ограничения, они вывели следующие асимптотические формулы:

а) *в одномерном случае*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{x(\lambda)} \{\lambda - q(x)\}^{1/2} dx; \tag{2}$$

где $x(\lambda)$ — корень уравнения $q(x) = \lambda$;

б) *в двумерном случае*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{4\pi} \iint_{q(x, y) < \lambda} \{\lambda - q(x, y)\} dx\, dy; \tag{2'}$$

в) *в трехмерном случае*

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \iiint\limits_{q(x,y,z)<\lambda} \{\lambda - q(x, y, z)\}^{3/2} dx\,dydz. \tag{3}$$

В работах Титчмарша ([2]) и Рея ([3]) были даны, соответственно, новые доказательства формул (2′) и (3). И, наконец, недавно Б. М. Левитаном ([4]), в связи с изучением разложения по собственным функциям уравнения Шредингера в случае неограниченно растущего потенциала в трехмерном пространстве, была доказана следующая асимптотическая формула

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{6\pi^2} \iiint\limits_{q(x,y,z)<\lambda} q^\tau(x, y, z)\{\lambda - q(x, y, z)\}^{3/2} dxdydz, \tag{4}$$

где $\tau \geqslant 0$ и

$$a_n^{(\tau)} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} q^\tau(x, y, z)\,\varphi_n^2(x, y, z)\,dxdydz.$$

Формула (3) следует из формулы (4) ($\tau = 0$).

Цель настоящей заметки доказать формулу, аналогичную формуле (4), в двумерном пространстве. Доказывается следующая

Теорема. Пусть функция $q(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°. *при* $r \leqslant 1$

$$|q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) - q(x, y)| < Ar\{q(x, y)\}^a, \tag{5}$$

где A и a — некоторые постоянные, причем $0 < a < \frac{3}{2}$,

2°. *при* $r > 1$

$$q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) < C\exp\left\{\frac{1}{2} r \sqrt{q(x, y)}\right\}, \tag{6}$$

3°. *существует такое постоянное число $B > 0$, что*

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \{q(x, y)\}^{-B} dxdy < +\infty. \tag{7}$$

Положим ($\tau \geqslant 0$)

$$\sigma(\lambda) = \text{mes}\,\{q(x, y) < \lambda\}, \quad \sigma_\tau(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \nu^\tau(\lambda - \nu)\,d\sigma(\nu)$$

и предположим, что существуют положительные константы α и β такие, что для достаточно больших λ выполняются неравенства

$$\alpha\sigma_\tau(\lambda) < \lambda\sigma'_\tau(\lambda) < \beta\sigma_\tau(\lambda), \tag{8}$$

тогда при $\lambda \to \infty$

$$\sum_{\lambda_n<\lambda} a_n^{(\lambda)} \sim \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{q(x,y)<\lambda} q^{\tau}(x,y)\{\lambda - q(x,y)\}\,dx\,dy, \tag{9}$$

где

$$a_n^{(\tau)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int q^{\tau}(x,y)\,\varphi_n^2(x,y)\,dx\,dy. \tag{9'}$$

Замечание. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, укажем некоторые достаточные условия* для того, чтобы имели место на первый взгляд странные неравенства (8).

Пусть для достаточно больших r выполняются неравенства

$$ar^{\delta} < q(x,y) < Ar^{\delta}, \tag{10}$$

где a, A и δ положительные константы. Так как

$$\operatorname{mes}\{Ar^{\delta}<\lambda\} \leqslant \operatorname{mes}\{q(x,y)<\lambda\} \leqslant \operatorname{mes}\{ar^{\delta}<\lambda\} \tag{11}$$

и

$$\operatorname{mes}\{ar^{\delta}<\lambda\} = \operatorname{mes}\left\{r < \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{1/\delta}\right\} = \pi\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2/\delta},$$

то из неравенств (11) и определения функции $\sigma(\lambda)$ следует

$$\pi\left(\frac{\lambda}{A}\right)^{2/\delta} \leqslant \sigma(\lambda) \leqslant \pi\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{2/\delta}. \tag{12}$$

Далее, полагая $\psi_{\tau}(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} \nu^{\tau}\,d\sigma(\nu)$ и интегрируя по частям, получим

$$\psi_{\tau}(\lambda) = \lambda^{\tau}\sigma(\lambda) - \tau\int\limits_0^{\lambda} \nu^{\tau-1}\sigma(\nu)\,d\nu.$$

Поэтому из (12) следует оценка

$$\pi\lambda^{\tau+2/\delta}\left(\frac{1}{A^{2/\delta}} - \frac{\tau}{\tau+2/\delta}\cdot\frac{1}{a^{2/\delta}}\right) < \psi_{\tau}(\lambda) < \pi\frac{\lambda^{\tau+2/\delta}}{a^{2/\delta}}.$$

Для того, чтобы левое неравенство было нетривиальным, необходимо потребовать, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1}{A^{2/\delta}} - \frac{1}{a^{2/\delta}}\cdot\frac{\tau}{\tau+2/\delta} > 0,$$

т. е.

$$\left(\frac{a}{A}\right)^{2/\delta} > \frac{\tau}{\tau+2/\delta}. \tag{13}$$

Заметим, что при $\tau = 0$ это неравенство выполняется при любых A, a и δ.

Таким образом, мы доказали, что из (10) при дополнительном условии (13) следуют неравенства

* Эти условия указаны Б. М. Левитаном, „Математический сборник", т. 41 (83): 4 (1957).

$$a_1\lambda^{\tau+2/\delta} < \psi_\tau(\lambda) < A_1\lambda^{\tau+2/\delta}, \tag{14}$$

где a_1 и A_1 положительные константы.

Покажем теперь, что из неравенств (14) следует неравенство

$$\psi_\tau(\lambda) < C\psi_\tau\left(\frac{\lambda}{2}\right), \tag{15}$$

где C — положительная константа.

В самом деле,

$$\psi_\tau(\lambda) < A_1\lambda^{\tau+2/\delta} = 2^{\tau+2/\delta}A_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\tau+2/\delta} = 2^{\tau+2/\delta}\frac{A_1}{a_1}a_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\tau+2/\delta}$$

$$< 2^{\tau+2/\delta}\frac{A_1}{a_1}\psi_\tau\left(\frac{\lambda}{2}\right) = C\psi_\tau\left(\frac{\lambda}{2}\right),$$

т. е. оценка (15). Из оценки (15) неравенства (8) следуют непосредственно. Действительно,

$$\sigma_\tau(\lambda) = \int_0^\lambda(\lambda-\nu)\,\nu^\tau d\sigma(\nu) > \int_0^{\lambda/2}(\lambda-\nu)\,\nu^\tau d\sigma(\nu) > \frac{\lambda}{2}\int_0^{\lambda/2}\nu^\tau d\sigma(\nu)$$

$$= \frac{\lambda}{2}\psi_\tau\left(\frac{\lambda}{2}\right) > C\lambda\psi_\tau(\lambda) = C\lambda\sigma'_\tau(\lambda).$$

Это доказывает правое неравенство (8). Левое неравенство (8) является тривиальным.

Доказательство теоремы. В работе ([9]) указано следующее интегральное равенство

$$\varphi_n(x,y) = \frac{\lambda_n+\mu}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}K_0(\varkappa r)\,\varphi_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty}\{q(\xi,\eta)-q(x,y)\}\,K_0(\varkappa r)\,\varphi_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \tag{A}$$

где $K_0(\varkappa r)$ функция Бесселя, а $\varkappa = \{q(x,y)+\mu\}^{1/2}$, $r = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{1/2}$.

Дифференцируя (А) $p-1$ раз (p — целое положительное число) по μ, используя элементарное неравенство $\left(\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\right)^2 \leqslant p\sum\limits_{i=1}^{p}a_i^2$, полагая в полученном неравенстве $n=1, 2,\cdots, N$ и складывая, мы получим неравенство

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi_n^2(x,y)}{(\lambda_n+\mu)^{2p}} \leqslant \frac{p}{4\pi^2}\left\{\sum_{n=1}^{N}\left[\int\int_{-\infty}^{\infty}K_{0,\mu}^{(p-1)}(\varkappa r)\,\varphi_n(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right]^2 +\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{p-1}(\lambda_n+\mu)^{-2k-2}\left|\int\int_{-\infty}^{\infty}\{q(\xi,\eta)-\right.$$

$$\left.-q(x,y)\}K_{0,\mu}^{(p-k-1)}(\varkappa r)\,\varphi_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right|^2\Bigg\}=\frac{p}{4\pi^2}\left\{S_N^*+\sum_{k=0}^{p-1}S_N^{(k)}\right\}. \qquad (16)$$

С помощью неравенства Бесселя для первой слагаемой правой части (16) нетрудно получить следующую оценку:

$$S_N^* < C\varkappa^{-2(2p-1)}, \quad (\mu\to\infty). \qquad (17)$$

Далее, непосредственным дифференцированием нетрудно проверить, что $K_{0,\mu}^{(n-k-1)}(\varkappa r)$ есть сумма членов вида

$$\frac{r^j K_i(\varkappa r)}{\varkappa^{p-i-k-2}} \quad (i=1,2,\cdots,p-k-2;\ j=0,1,\cdots,p-k-1).$$

Поэтому для второй слагаемой применением неравенства Бесселя нетрудно получить оценку

$$\sum_{k=1}^{p-1}S_N^{(k)} < C\sum_{k=0}^{p-1}\left\{\frac{1}{\varkappa^{\lambda}}\right\}^{\frac{p-k-1}{p}}\left\{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_n+\mu)^{2p}}\left[\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1 r^{\eta-1}|\varphi_n(x+r\cos\vartheta,\right.\right.$$

$$y+r\sin\vartheta)|\,dr\times\int_0^{2\pi}d\vartheta'\int_0^1 r'^{\eta-1}|\varphi_n(x+r'\cos\vartheta',y+$$

$$\left.\left.+r'\sin\vartheta')|\,dr'\right]+\frac{1}{\varkappa^{\sigma}}\right\}^{\frac{k+1}{p}}, \qquad (18)$$

где $\lambda>4p-2-\eta$, а η и σ — произвольные положительные числа.

Помножим обе части неравенства (18) на $q^{\tau}(x,y)$, $(\tau\geqslant 0)$ и проинтегрируем по всему пространству E_2. Применением неравенства Гёльдера получим оценку

$$\int\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{p-1}S_N^{(k)}q^{\tau}(x,y)\,dx\,dy < \frac{C}{\mu^{\tau}}(I_{\tau,p}+S_{N,\tau,p}), \qquad (19)$$

где положено

$$I_{\tau,p}=\int\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^{\tau}(x,y)\,dx\,dy}{\varkappa^{2(2p-1)}}, \quad S_{N,\tau,p}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n^{(\tau)}}{(\lambda_n+\mu)^{2p}}. \qquad (20)$$

Числа $a_n^{(\tau)}$ определяются по формулам (9').

Помножим обе части неравенства (16) на $q^\tau(x, y)$ и проинтегрируем по всему пространству L_2. Тогда из оценок (17) и (19) следует оценка

$$S_{N,\tau,p} \leqslant CI_{\tau,p} + \frac{C}{\mu^\eta}(I_{\tau,p} + S_{N,\tau,p}). \tag{21}$$

Выберем μ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{C}{\mu^\eta} < \frac{1}{2}.$$

Тогда из (21) следует оценка

$$S_{N,\tau,p} < CI_{\tau,p}, \tag{22}$$

где $S_{N,t,p}$ и $I_{\tau,p}$ определяются по формулам (20).

Так как неравенство (22) имеет место при любом N, то из (22) следует важная оценка ($\mu \to \infty$):

$$S_{\tau,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(\tau)}}{(\lambda_n + \mu)^{2p}} \sim \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{q^\tau(x, y)}{\{q(x, y) + \mu\}^{2p-1}}\, dxdy. \tag{23}$$

Введем монотонную функцию от λ

$$\sigma(\lambda) = \operatorname{mes}\{q(x, y) < \lambda\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \frac{q^\tau(x, y)}{\{q(x, y) + \mu\}^{2p-1}}\, dxdy = \int\limits_0^{\infty} \frac{\lambda^\tau d\sigma(\lambda)}{(\lambda + \mu)^{2p-1}} =$$

$$= (2p - 1)\int\limits_0^{\infty} \frac{\psi_\tau(\lambda)\, d\lambda}{(\lambda + \mu)^{2p}}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует асимптотическая формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(\tau)}}{(\lambda_n + \mu)^{2p}} \sim \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{d\sigma_\tau(\lambda)}{(\lambda + \mu)^{2p}}, \tag{25}$$

где

$$\sigma_\tau(\lambda) = \int\limits_0^{\lambda} (\lambda - \nu)\, \nu^\tau d\sigma(\nu).$$

Полагая

$$\alpha_\tau(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} a_n^{(\tau)},$$

асимптотическую формулу (25) можем переписать так

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{2p}} \sim \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{d\sigma_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{2p}}. \tag{26}$$

Тогда в силу условия (8) применима тауберова теорема М. В. Келдыша ([5]), в силу которой из (26) следует

$$\alpha_\tau(\lambda) \sim \frac{1}{4\pi}\sigma_\tau(\lambda)$$

или

$$\sum_{\lambda_n<\lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{q(x,y)<\lambda} \{\lambda - q(x,y)\}\, q^\tau(x,y)\,dxdy,$$

т. е. нужная нам формула (9).

Теорема доказана полностью.

Теперь из (23) получим одну оценку, которая нам пригодится в другой работе для изучения вопросов разложения и дифференцированных разложений по собственным функциям в случае неограниченно растущего потенциала в двумерном пространстве. При прежних обозначениях из (24) следует

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu)^{2p}} < C\int_0^\infty \frac{\psi_\tau(\lambda)\,d\lambda}{(\lambda+\mu)^{2p}}. \tag{27}$$

Если выполнено условие (10), то $\sigma(\lambda) < C\lambda^{2/\delta}$ (см. формулу (12)), в силу чего из (27) следует оценка ($\mu\to\infty$):

$$\int_0^\infty \frac{d\alpha_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu^2)^{2p}} < C\mu^{2\tau+4/\delta+2-4p}$$

и значит подавно

$$\int_{\mu^2}^{(\mu+1)^2} \frac{d\alpha_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu^2)^{2p}} < C\mu^{2\tau+4/\delta+2-4p}. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$\int_{\mu^2}^{(\mu+1)^2} \frac{d\alpha_\tau(\lambda)}{(\lambda+\mu^2)^{2p}} > \frac{C}{\mu^{4p}}\{\alpha_\tau[(\mu+1)^2] - \alpha_\tau(\mu^2)\}. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует оценка ($\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$):

$$\alpha_\tau[(\mu+1)^2] - \alpha_\tau(\mu^2) = \sum_{\mu<\mu_n<\mu+1} a_n^{(\tau)} < C\mu^{2\tau+4/\delta+2}. \tag{30}$$

Пользуясь оценкой (30), в другой работе мы изучим вопросы разложения и дифференцирования разложения по собственным функциям уравнения (1).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Շրեդինգերի օպերատորի սեփական արժեքների բաշխման մի ասիմպտոտիկ բանաձևի մասին

Դիցուք $q(x, y)$ ֆունկցիան ամբողջ երկչափ տարածության մեջ սահմանված իրական անընդհատ ֆունկցիա է և

$$\lim_{r \to \infty} q(x, y) = +\infty: \qquad (1)$$

որտեղ $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$:

Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0.$$

Հայտնի է, որ եթե (1) պայմանը բավարարված է, ապա (2) հավասարման սպեկտրը կետային է և ունի միակ սահմանային կետ անվերջում: Նշանակենք $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ (2) հավասարման սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \ldots, \varphi_n(x, y), \ldots$-ով՝ համապատասխան օրթոնորմավորված սեփական ֆունկցիաները: Այնուհետև, $N(\lambda)$-ով նշանակենք (2) հավասարման այն սեփական արժեքների թիվը, որոնք փոքր են տված λ-ից, այսինքն՝

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1:$$

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $N(\lambda)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ $\lambda \to \infty$: Առաջին անգամ այս հարցը ուսումնասիրվել է Ռեստի և Մանդլի կողմից [1] աշխատության մեջ: Նրանք $q(x, y)$ ֆունկցիայի վրա դնելով բավական ծանր պայմաններ, միաչափ, երկչափ և եռաչափ տարածությունների մեջ ստացել են համապատասխանաբար, (2), (2') և (3) ասիմպտոտիկ բանաձևերը (տես հիմնական տեքստում):

1953 թ. Տիտչմարշը [2] և 1954 թ. Ռեյը [3] տվեցին, համապատասխանաբար, (2') և (3) բանաձևերի նոր ապացույցներ: Բ. Մ. Լևիտանը [4] ըստ (2) հավասարման սեփական ֆունկցիաների վերլուծության որոշ հարցերի կապակցությամբ ընդհանրացրեց (3) բանաձևը: Նրա արդյունքը կայանում է հետևյալում.

Նշանակենք ($\tau > 0$)

$$a_n^{(\tau)} = \iiint_{-\infty}^{\infty} q^{\tau}(x, y, z) \varphi_n^2(x, y, z)\, dx dy dz:$$

Այդ դեպքում տեղի ունի (4) ասիմպտոտիկ բանաձևը (տես հիմնական տեքստում):

Ներկա հոդվածում մեր նպատակն է ստանալ (4) բանաձևին անալոգ բանաձև երկչափ տարածության մեջ:

Թեորեմ. Դիցուք $q(x, y)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

1°. երբ $r < 1$

$$|q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) - q(x, y)| < A r \{q(x, y)\}^{a},$$

որտեղ A և a հաստատուններ են, ըստ որում $0 < a < {}^3/_2$:

2°. երբ $r > 1$

$$q(x + r\cos\vartheta, y + r\sin\vartheta) < C \exp\left\{\frac{1}{2} r \sqrt{q(x, y)}\right\},$$

որտեղ C ինչ որ հաստատուն է:

3°. գոյություն ունի այնպիսի $B > 0$ հաստատուն, որ

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \{q(x, y)\}^{-B} dx dy < \infty:$$

Նշանակենք ($\tau \geq 0$)

$$\sigma(\lambda) = \operatorname{mes}\{q(x, y) < \lambda\}, \quad \sigma_\tau(\lambda) = \int_0^\lambda (\lambda - s)^\tau \, d\sigma(s)$$

և ենթադրենք, որ գոյություն ունեն այնպիսի դրական α և β հաստատուններ, որ λ-ի բավականաչափ մեծ արժեքների համար

$$\alpha\sigma_\tau(\lambda) < \lambda\sigma'_\tau(\lambda) < \beta\sigma_\tau(\lambda).$$

Այդ ենթադրությունների դեպքում ($\lambda \to \infty$)

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} a_n^{(\tau)} \sim \frac{1}{4\pi} \iint_{q(x, y) < \lambda} q^\tau(x, y)\,[\lambda - q(x, y)]\, dxdy:$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Дж. С. де Уэт* и *Ф. Мандль*, Proceedings of the Royal Society of London, vol. 200 (1950). [2] *Е. С. Титчмарш*, Proceedings of the London Mathematical Society, III ser., 3 (1953). [3] *D. Рей*, Trans. Amer. Math. Society, 77, 2 (1954). [4] *Б. М. Левитан*, ДАН СССР, т. 103, 2 (1955). [5] *М. В. Келдыш*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова, XXXVIII (1951).