ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVII 1958 2

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об одном интегральном преобразовании

(Представлено М. М. Джрбашяном 24.I.1959)

В работе ([1]), посвященной решению смешанной задачи для одного гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную, была рассмотрена задача о разложении по собственным функциям уравнения $y'' - 2ia\lambda y' + \lambda^2 y = 0$ с нулевыми граничными условиями. Оказалось, что при некоторых ограничениях, накладываемых на функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, возможно их одновременное разложение по собственным функциям указанной задачи, имеющее вид

$$f_1(x) = \sum c_k \varphi_k(x), \quad f_2(x) = \sum i c_k \lambda_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

где λ_k собственные значения и $\varphi_k(x)$ соответствующие собственные функции.

Этот результат послужил основой для исследований М. М. Джрбашяна ([2]), построившего соответствующее интегральное преобразование на полуоси $(0, \infty)$.

В настоящей заметке мы рассмотрим одновременное разложение пары функций, несколько отличное от указанного выше, и, основываясь на этом, построим соответствующее интегральное преобразование на полуоси $(0, \infty)$. Способ получения этого преобразования по идее весьма близок тому, которым пользовался М. М. Джрбашян в работе ([2]).

Итак, пусть A симметрический оператор в гильбертовом пространстве H и пусть рассматривается уравнение

$$(A^* + \lambda\omega_2 E)(A - \lambda\omega_1 E)\varphi = 0, \tag{2}$$

где ω_1 и ω_2 положительные числа. Обозначим собственные значения и собственные функции этой задачи через λ_k и φ_1^k. Тогда, как показано в ([3]), если положить

$$\varphi_2^k = A\varphi_1^k - \lambda_k\omega_1\varphi_1^k, \qquad \psi_1^k = \lambda_k(\omega_1 + \omega_2)\varphi_1^k + \varphi_2^k, \qquad \psi_2^k = -\varphi_1^k, \tag{3}$$

то коэффициенты c_k разложений

$$f_1 = \sum c_k \varphi_1^k, \qquad f_2 = \sum c_k \varphi_2^k \tag{4}$$

определяются по формуле

$$c_k = \frac{\omega_1 (f_1, \psi_1^k) + \omega_2 (f_2, \psi_2^k)}{\omega_1 (\varphi_1^k, \psi_1^k) + \omega_2 (\varphi_2^k, \psi_2^k)}. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь в качестве A оператор дифференцирования $A\varphi = i\varphi'$ на отрезке $[0, b]$ с минимальной областью определения $\varphi(0) = \varphi(b) = 0$. Положим, далее, при вещественном a

$$\omega_1 = \sqrt{a^2 + 1} - a, \qquad \omega_2 = \sqrt{a^2 + 1} + a. \tag{6}$$

Очевидно, что тогда ([4]) задача (2) сводится к задаче о собственных функциях уравнения

$$y'' - 2ia\lambda y' + \lambda^2 y = 0 \tag{7}$$

с граничными условиями $y(0) = y(b) = 0$.

Нетрудно убедиться, что собственные значения этой задачи равны

$$\lambda_k = \frac{2\pi k}{(\omega_1 + \omega_2) b} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \cdots), \tag{8}$$

а соответствующие собственные функции

$$\varphi_1^k(x) = \frac{e^{i\lambda_k \omega_2 x} - e^{-i\lambda_k \omega_1 x}}{i\lambda_k (\omega_1 + \omega_2)}. \tag{9}$$

Далее, пользуясь формулами (3), без труда находим

$$\varphi_2^k(x) = ie^{i\lambda_k \omega_2 x}, \quad \psi_1^k(x) = ie^{-i\lambda_k \omega_1 x}, \quad \psi_2^k(x) = \frac{e^{-i\lambda_k \omega_1 x} - e^{i\lambda_k \omega_2 x}}{i\lambda_k (\omega_1 + \omega_2)}. \tag{10}$$

Положим теперь в (4) $f_2 = 0$ и $f_1 = f$. Тогда из (5) получим

$$c_k = \frac{\lambda_k \omega_1}{b} (f, \psi_1^k),$$

и следовательно,

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k \omega_1}{b} (f, \psi_1^k) \varphi_1^k. \tag{11}$$

Совершим в этой формуле предельный переход, устремляя b к бесконечности. Для этого заметим прежде всего, что, как это нетрудно проверить, функция

$$\Psi(x, \lambda) = \frac{\omega_2 e^{-i\omega_1 \lambda x} + \omega_1 e^{i\omega_2 \lambda x}}{\omega_1 + \omega_2} \sin\alpha - \frac{e^{i\omega_2 \lambda x} - e^{-i\omega_1 \lambda x}}{i\lambda (\omega_1 + \omega_2)} \cos\alpha \tag{12}$$

является решением задачи Коши для уравнения (7) при условиях

$$\Psi(0, \lambda) = \sin\alpha, \quad \Psi'(0, \lambda) = -\cos\alpha. \tag{13}$$

Очевидно, что в случае, когда $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, имеем $\varphi_1^k(x) = -\Psi(x, \lambda_k)$. Таким образом (11) может быть переписано в виде

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{i\lambda_k\omega_1}{b}\left(\int_0^b f(t)\, e^{i\lambda_k\omega_1 t}\, dt\right)\Psi(x, \lambda_k).$$

Полученный ряд легко записать в виде интеграла Стильтьеса, если ввести в рассмотрение функцию скачков

$$\rho_b(\lambda) = \begin{cases} -\sum\limits_{\lambda<\lambda_k<0} \dfrac{i\lambda_k\omega_1}{b} & (\lambda \leqslant 0), \\[2ex] \sum\limits_{0<\lambda_k<\lambda} \dfrac{i\lambda_k\omega_1}{b} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

Действительно, поскольку скачки $\rho_b(\lambda)$ равны $\dfrac{i\lambda_k\omega_1}{b}$, то

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^b f(t)\, e^{i\lambda\omega_1 t} dt\right)\Psi(x, \lambda)\, d\rho_b(\lambda). \tag{14}$$

Легко найти асимптотику $\rho_b(\lambda)$ при больших b. В самом деле, поскольку λ_k составляют арифметическую прогрессию с разностью, равной $\dfrac{2\pi}{(\omega_1 + \omega_2)\, b}$, то, например, при положительных λ количество членов в сумме $\rho_b(\lambda) = \dfrac{i\omega_1}{b} \sum\limits_{0<\lambda_k<\lambda} \lambda_k$ асимптотически равно $\dfrac{\lambda(\omega_1 + \omega_2)\, b}{2\pi}$, а поэтому $\rho_b(\lambda) \sim \dfrac{i\omega_1}{b}\lambda\dfrac{\lambda(\omega_1 + \omega_2)\, b}{4\pi}$, откуда без труда заключаем, что

$$\rho(\lambda) = \lim_{b\to\infty} \rho_b(\lambda) = \frac{i\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\lambda^2}{4\pi}.$$

Эта же формула справедлива и при отрицательных λ. Совершая формально предельный переход в (14) (при некоторых ограничениях, накладываемых на $f(x)$, это может быть легко обосновано, на чем однако мы не останавливаемся), находим

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} f(t)\, e^{i\lambda\omega_1 t}\, dt\right)\Psi(x, \lambda)\, d\rho(\lambda)$$

или, если ввести обозначение

$$\Omega(\lambda) = \frac{i\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\lambda}{2\pi}, \tag{15}$$

то, поскольку $\Omega(\lambda) = \rho'(\lambda)$,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(t)e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt\right)\Psi(x, \lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda. \tag{16}$$

В этой заметке мы установим более общий результат, причем в качестве $f(x)$ будем брать произвольную, суммируемую с квадратом функцию на полуоси, и интегралы понимать в смысле сходимости в среднем. Однако, прежде чем перейти к точной формулировке теоремы, докажем следующую простую лемму.

Лемма. Пусть $f(x) \in L^2(0, \infty)$ и

$$\Phi(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f(t)e^{i\omega_1\lambda t}dt.$$

При любом $\varepsilon > 0$ *можно указать такую функцию* $\tilde{\Phi}(\lambda)$, *аналитическую в верхней полуплоскости (вплоть до оси) и убывающую на бесконечности как* $\frac{1}{\lambda^2}$, *что одновременно выполняются следующие неравенства*

$$\|\Phi(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda)\| < \varepsilon,$$

$$|\Phi(i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha) - \tilde{\Phi}(i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha)| < \varepsilon \qquad (\operatorname{ctg}\alpha > 0).$$

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(x)$ имеет производные второго порядка и обращается тождественно в нуль в окрестности нуля и бесконечности. Тогда

$$\tilde{\Phi}(\lambda) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\,e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt = \frac{\tilde{f}(t)e^{i\lambda\omega_1 t}}{i\lambda\omega_1}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{i\lambda\omega_1}\int_0^\infty \tilde{f}'(t)\,e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt =$$

$$= -\frac{\tilde{f}'(t)}{i\lambda\omega_1}\,\frac{e^{i\lambda\omega_1 t}}{i\lambda\omega_1}\Bigg|_0^\infty - \frac{1}{\lambda^2\omega_1^2}\int_0^\infty \tilde{f}''(t)\,e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt = -\frac{1}{\lambda^2\omega_1^2}\int_0^\infty \tilde{f}''(t)\,e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt.$$

Но в верхней полуплоскости, очевидно, имеем

$$\left|\int_0^\infty \tilde{f}''(t)\,e^{i\lambda\omega_1 t}\,dt\right| \leqslant \int_0^\infty |\tilde{f}''(t)|\,dt.$$

Таким образом, $\tilde{\Phi}(\lambda)$ аналитична в верхней полуплоскости и убывает на бесконечности как $\frac{1}{\lambda^2}$. Для получения нужных оценок заметим следующее. Как известно, какова бы ни была $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, при произвольных A и $\omega \neq 0$ $(Im\,\omega = 0)$ имеют место следующие формулы обращения. Если

$$\Phi(\lambda) = A \cdot \underset{\sigma \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(t) e^{i\omega\lambda t} dt, \tag{17}$$

то

$$f(x) = \frac{\omega}{2\pi A} \cdot \underset{\sigma \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda) e^{-i\omega\lambda x} d\lambda. \tag{18}$$

При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{2\pi A^2}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \tag{19}$$

Теперь ясно, что если $\tilde{f}(x)$ достаточно близка к $f(x)$ по метрике пространства L_2, то первое неравенство леммы $\|\Phi(\lambda) - \tilde{\Phi}(\lambda)\| < \varepsilon$ будет выполнено. Займемся вторым неравенством. Заметив, что точка $i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha$ лежит в верхней полуплоскости, представим $\Phi(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) - \tilde{\Phi}(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)$ в виде сходящегося интеграла

$$\Phi(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) - \tilde{\Phi}(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) = \int_0^{\infty} \{f(t) - \tilde{f}(t)\} e^{-\omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot t} dt.$$

Отсюда

$$|\Phi(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha) - \tilde{\Phi}(i\omega_1 \operatorname{ctg} \alpha)|^2 \leqslant \int_0^{\infty} |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot t} dt =$$

$$= \frac{1}{2\omega_1^2 \operatorname{ctg} \alpha} \int_0^{\infty} |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt.$$

Таким образом, если $\tilde{f}(x)$ достаточно близка к $f(x)$ в среднем, то оба неравенства леммы выполняются.

Переходя к формулировке теоремы, введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(\lambda) = \frac{\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\lambda}{2\pi(\lambda\omega_2 \sin \alpha - i \cos \alpha)}. \tag{20}$$

Теперь мы утверждаем следующее.

Теорема. Пусть $f(x) \in L^2(0, \infty)$ *и*

$$\Phi(\lambda) = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^N f(t) e^{i\omega_1\lambda t} dt. \tag{21}$$

Если $\Psi(x, \lambda)$ *является решением уравнения* (7) *с начальными условиями* (13) [*формула* (12)], *а* $\Omega(\lambda)$ *определена формулой* (20), *то*

а) при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda + \omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha\,\Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)e^{-\operatorname{ctg}\alpha\, x},$$

в) при $\operatorname{ctg}\alpha < 0$

$$f(x) = \underset{\sigma\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda.$$

Доказательство. Предположим что $\Phi(\lambda)$ аналитическая функция в верхней полуплоскости вплоть до вещественной оси и убывает на бесконечности как $\frac{1}{\lambda^2}$. Пользуясь формулой (12) для $\Psi(x,\lambda)$, после простейших вычислений найдем

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda = \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,e^{-i\omega_1\lambda x}d\lambda +$$

$$+\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,\frac{\lambda\omega_1\sin\alpha + i\cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\,e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda.$$

Рассмотрим теперь контур Γ_σ с положительным направлением обхода, составленный из отрезка $[-\sigma,\sigma]$ и полуокружности C_σ, лежащей в верхней полуплоскости и опирающейся на $[-\sigma,\sigma]$, как на диаметр. Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda = \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma} \Phi(\lambda)\,e^{-i\omega_1\lambda x}d\lambda +$$

$$+\omega_1\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\,e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda -$$

$$-\omega_1\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\sigma} \Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\,e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda.$$

Заметим, что во втором интеграле правой части подинтегральная функция не имеет особенностей в Γ_σ при $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$. Если же $\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то при достаточно больших σ (в силу того, что $\omega_1\omega_2 = 1$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma} \Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\,e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda =$$

$$= \operatorname{res}\left\{\Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\,e^{i\omega_2\lambda x}\right\}_{\lambda = i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Итак, при $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и достаточно больших σ

$$\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,e^{-i\omega_1\lambda x}d\lambda = \int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+\omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha\,\Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)e^{-\operatorname{ctg}\alpha\cdot x}+$$

$$+\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha-\cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha-i\cos\alpha}e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda, \tag{22}$$

а при $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$

$$\frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,e^{-i\omega_1\lambda x}d\lambda = \int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\,d\lambda +$$

$$+\frac{\omega_1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\Phi(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha-\cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha-i\cos\alpha}e^{i\omega_2\lambda x}d\lambda.$$

Таким образом, при $\operatorname{ctg}\alpha \leqslant 0$ в формуле (22) пропадает внеинтегральный член. Поскольку именно эти формулы лежат в основе доказательства, то мы ограничимся случаем, когда $\operatorname{ctg}\alpha > 0$. Второе утверждение теоремы получается из последней формулы таким же путем, каким мы установим, исходя из (22), справедливость первого утверждения.

Итак, пусть $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и $f(x)$ произвольная функция, суммируемая с квадратом на полуоси $f(x) \in L_2(0,\infty)$. При заданном $\varepsilon > 0$ на основании доказанной выше леммы подберем такую функцию $\tilde{\Phi}(\lambda)$, аналитическую в верхней полуплоскости и убывающую как $\frac{1}{\lambda^2}$, чтобы выполнялись неравенства

$$\|\Phi(\lambda)-\tilde{\Phi}(\lambda)\| < \varepsilon, \quad |\Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)-\tilde{\Phi}(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)| < \frac{\varepsilon}{\omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{23}$$

Далее, в силу формул обращения (17), (18) для достаточно больших σ будет

$$\left\| f(x) - \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,e^{-i\omega_1\lambda x}d\lambda \right\| < \varepsilon.$$

На основании равенства Парсеваля из неравенства (23) следует

$$\left\| \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\{\Phi(\lambda)-\tilde{\Phi}(\lambda)\}\,e^{-i\omega_1\lambda x}\,d\lambda \right\| \leqslant \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}\varepsilon}.$$

Теперь ясно, что при всех достаточно больших σ должно выполняться неравенство

$$\left\| f(x) - \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \tilde{\Phi}(\lambda)\, e^{-i\omega_1 \lambda x}\, d\lambda \right\| \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}}\right)\varepsilon. \tag{24}$$

Нам понадобятся еще два неравенства. Для их получения заметим, что, как это нетрудно подсчитать, пользуясь формулами (12) и (20),

$$\Psi(x, \lambda)\,\Omega(\lambda) = \Psi_1(\lambda)\, e^{-i\omega_1 \lambda x} + \Psi_2(\lambda)\, e^{i\omega_2 \lambda x},$$

где положено

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{\omega_1}{2\pi}, \qquad \Psi_2(\lambda) = \frac{\omega_1}{2\pi}\, \frac{i\lambda\omega_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{i\lambda\omega_2 \sin\alpha + \cos\alpha}.$$

Очевидно, что $\Psi_2(\lambda)$ при любом α ограничена на всей оси. Пусть

$$|\Psi_1(\lambda)| \leqslant M, \qquad |\Psi_2(\lambda)| \leqslant M. \tag{25}$$

Если через $F(\lambda)$ обозначим произвольную функцию, суммируемую с квадратом на оси, $F(\lambda) \in L^2(-\infty, \infty)$, то поскольку

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\, \Psi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\, \Psi_1(\lambda)\, e^{-i\omega_1 \lambda x}\, d\lambda + \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\, \Psi_2(\lambda)\, e^{i\omega_2 \lambda x}\, d\lambda,$$

то, в силу равенства Парсеваля (19), без труда получим

$$\left\| \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\, \Psi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}}\, \| F(\lambda)\, \Psi_1(\lambda) \| + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\, \| F(\lambda)\, \Psi_2(\lambda) \|.$$

Учитывая еще оценки (25), имеем окончательно

$$\left\| \int_{-\sigma}^{\sigma} F(\lambda)\, \Psi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\right) M\, \| F(\lambda) \|. \tag{26}$$

Заметим, наконец, что при всех достаточно больших σ

$$\left\| \frac{\omega_1}{2\pi i} \int_{C_\sigma} \tilde{\Phi}(\lambda)\, \frac{i\lambda\omega_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2 \sin\alpha - i\cos\alpha}\, e^{i\omega_2 \lambda x}\, d\lambda \right\| < \varepsilon. \tag{27}$$

Действительно, для $\tilde{\Phi}(\lambda)$ справедлива формула (22). Отсюда легко следует, на основании теоремы Планшереля, что функция

$$\frac{\omega_1}{2\pi i} \int_{C_\sigma} \tilde{\Phi}(\lambda)\, \frac{i\lambda\omega_1 \sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2 \sin\alpha - i\cos\alpha}\, e^{i\omega_2 \lambda x}\, d\lambda$$

имеет предел в среднем при $\sigma \to \infty$. Этот предел равен нулю, ибо последнее выражение точечно сходится к нулю ($x > 0$) при $\sigma \to \infty$ в силу известной леммы Жордана.

Теперь уже легко доказать теорему. В самом деле, на основании равенства (22) и оценок (26), (23) и (27) заключаем, что при всех достаточно больших σ

$$\left\| \frac{\omega_1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\tilde{\Phi}(\lambda)\, e^{-i\omega_1\lambda x}\, d\lambda - \omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha\Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)\, e^{-\operatorname{ctg}\alpha . x} - \right.$$

$$\left. - \int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,\Psi(x,\ \lambda)\,\Omega(\lambda)\, d\lambda \right\| =$$

$$= \left\| \int_{-\sigma}^{\sigma}\{\tilde{\Phi}(\lambda) - \Phi(\lambda)\}\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\, d\lambda + \omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha\{\tilde{\Phi}(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha) - \right.$$

$$\left. - \Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)\}e^{-\operatorname{ctg}\alpha . x} + \frac{\omega_1}{2\pi i}\int_{C_\sigma}\tilde{\Phi}(\lambda)\,\frac{i\lambda\omega_1\sin\alpha - \cos\alpha}{\lambda\omega_2\sin\alpha - i\cos\alpha}\, e^{i\omega_2\lambda x}\, d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\right) M\,\|\tilde{\Phi}(\lambda) - \Phi(\lambda)\| + \varepsilon\,\|e^{-\operatorname{ctg}\alpha . x}\| + \varepsilon <$$

$$< \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\right) M + \frac{1}{2\operatorname{ctg}\alpha} + 1\right]\varepsilon.$$

Отсюда, на основании (24), следует, что при всех достаточно больших σ

$$\left\| f(x) - \omega_1^2(\omega_1^2+1)\operatorname{ctg}\alpha\Phi(i\omega_1\operatorname{ctg}\alpha)\, e^{-\operatorname{ctg}\alpha . x} - \int_{-\sigma}^{\sigma}\Phi(\lambda)\,\Psi(x,\lambda)\,\Omega(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\left(\sqrt{\frac{2\pi}{\omega_1}} + \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_2}}\right) M + \frac{1}{2\operatorname{ctg}\alpha} + \sqrt{\frac{\omega_1}{2\pi}} + 2\right]\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մի ինտեգրալ ձևափոխության մասին

(²) աշխատանքում օգտագործված եղանակին շատ մոտ եղանակով ապացուցված է հետևյալ թեորեմը։

Դիցուք a-ն իրական հաստատուն է և $\Psi(x, \lambda)$-ն

$$y'' - 2ai\lambda y' + \lambda^2 y = 0$$

հավասարման լուծումն է $(0, \infty)$ կիսաառանցքի վրա, որը բավարարում է

$$\Psi(0, \lambda) = \sin a, \qquad \Psi'(0, \lambda) = -\cos a$$

սկզբնական պայմաններին։

Նշանակելով $\omega_1 = \sqrt{a^2+1} - a$, $\omega_2 = \sqrt{a^2+1} + a$, քննարկում ենք

$$\Omega(\lambda) = \frac{\omega_1(\omega_1 + \omega_2)\lambda}{2\pi(\lambda\omega_2 \sin\alpha - l\cos\alpha)}$$

Ֆունկցիան։

Պնդվում է հետևյալը՝

եթե $f(x) \in L^2(0, \infty)$ և

$$\Phi(\lambda) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f(t)\, e^{i\omega_1\lambda t}\, dt,$$

ապա՝

ա) եթե $\operatorname{ctg}\alpha > 0$

$$f(x) = \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-a}^{a} \Phi(\lambda)\, \Psi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda + \omega_1^2(\omega_1^2 + 1)\operatorname{ctg}\alpha\, \Phi(i\omega_1 \operatorname{ctg}\alpha) e^{-\operatorname{ctg}\alpha . x}$$

բ) եթե $\operatorname{ctg}\alpha < 0$

$$f(x) = \underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-a}^{a} \Phi(\lambda)\, \Psi(x, \lambda)\, \Omega(\lambda)\, d\lambda:$$

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Джрбашян, Р. А. Александрян*, „Известия АН Армянской ССР", серия физ.-мат. наук, т. X, № 1 (1957). [2] *М. М. Джрбашян*, „Известия АН Армянской ССР", серия физ.-мат. наук, т. X, № 4. [3] *Р. М. Мартиросян*, ДАН Армянской ССР, т. XXVII, № 1 (1958). [4] *Ф. Рисс* и *Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.