ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVII 1958 1

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

Об одной биортогональной системе

(Представлено М. М. Джрбашяном 24. I. 1958)

В одной работе Лангера (1) дано одновременное разложение пары функций по собственным функциям уравнения вида $y'' - 2ai\lambda y' + \lambda^2 y = 0$ (в простейшем случае) с определенными граничными условиями. Аналогичные вопросы для уравнения четвертого порядка были впервые поставлены Папковичем в связи с некоторыми задачами теории упругости (2). А для уравнения второго порядка разложение по собственным функциям, несколько отличное от разложения Лангера, было впервые установлено в работе (3), возникшей в связи с решением одной смешанной задачи для гиперболического уравнения, содержащего смешанную производную. Последняя работа послужила основой для исследований М. М. Джрбашяна (4), построившего соответствующие интегральные преобразования на полуоси $(0, \infty)$.

В связи с продумыванием этих результатов возникла следующая задача. Пусть φ_k обозначают собственные элементы уравнения $(A^* + \lambda\omega_2 E)(A - \lambda\omega_1 E)\varphi = 0$ в гильбертовом пространстве H. Каким образом дополнить систему φ_k тремя последовательностями элементов так, чтобы получить биортогональную систему в пространстве $\tilde{H} = H \times H$ с подходящим образом выбранным скалярным произведением? Решению этой задачи посвящена наша работа. Она состоит из двух частей. В первой части дается построение указанной биортогональной системы. Во второй части показано, что вообще нельзя ожидать полноты указанной системы в обычном смысле слова. По-видимому, разложения по указанной биортогональной системе возможны лишь для элементов, принадлежащих области определения оператора A.

Итак, рассмотрим уравнение

$$(A^* + \lambda\omega_2 E)(A - \lambda\omega_1 E)\varphi = 0, \tag{1}$$

где A произвольный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, ω_1 и ω_2—вещественные числа одинакового знака, например, оба положительны. Очевидно уравнение (1) эквивалентно следующей системе

$$A\varphi_1 - \lambda\omega_1\varphi_1 = \varphi_2, \tag{2}$$

$$A^*\varphi_2 + \lambda\omega_2\varphi_2 = 0. \tag{3}$$

Одновременно рассмотрим систему

$$A\psi_2 + \lambda\omega_2\psi_2 = -\psi_1, \tag{4}$$

$$A^*\psi_1 - \lambda\omega_1\psi_1 = 0. \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что если при некотором λ элементы φ_1 и φ_2 удовлетворяют системе (2)—(3), то при том же значении λ элементы

$$\psi_1 = \lambda(\omega_1 + \omega_2)\varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi_2 = -\varphi_1 \tag{6}$$

удовлетворяют системе (4)—(5).

Введем теперь в рассмотрение новое гильбертово пространство $\tilde{H} = H \times H$, элементами которого служат упорядоченные пары $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ элементов пространства H. Скалярное произведение в $\tilde{H}$ зададим формулой

$$(\{\varphi_1, \varphi_2\}, \{\psi_1, \psi_2\}) = \omega_1(\varphi_1, \psi_1) + \omega_2(\varphi_1, \psi_2). \tag{7}$$

При этом нетрудно проверить выполнение всех аксиом скалярного произведения, и $\tilde{H}$ оказывается полным гильбертовым пространством.

Элементы этого нового пространства $\tilde{H}$ мы будем обозначать соответствующими прописными буквами, например $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$. Пусть теперь λ_k обозначают собственные значения задачи (1), а $\Phi_k = \{\varphi_1^k, \varphi_2^k\}$ соответствующее решение системы (2)—(3). Через $\Psi_k = \{\psi_1^k, \psi_2^k\}$ будем обозначать решение системы (4)—(5), полученное из Φ_k по формулам (6).

Теперь мы утверждаем следующее.

Теорема. Собственные значения (с учетом кратности) *задач* (2)—(3) *и* (4)—(5) *совпадают и всегда вещественны. Соответствующие последовательности* $\{\Phi_k\}$ *и* $\{\Psi_k\}$ *образуют биортогональную систему в пространстве* $\tilde{H}$ *в случае однократного спектра. В случае же кратных собственных значений соответствующим выбором элементов* Φ_k *и* Ψ_k, *указанным ниже, можно обратить систему* $\{\Phi_k\}$, $\{\Psi_k\}$ *в биортогональную.*

Доказательство. На основании вышесказанного, совпадение собственных значений для систем (2)—(3) и (3)—(4) не нуждается в доказательстве. Покажем, что собственные значения вещественны. Действительно, если λ есть собственное значение, а φ — соответствующая собственная функция, то, учитывая включение $A \subset A^*$, уравнение (1) запишем в виде

$$A^*A\varphi + \lambda(\omega_2 - \omega_1)A\varphi - \omega_1\omega_2\lambda^2\varphi = 0.$$

Если обе части этого уравнения умножить скалярно на φ, считая φ нормированным, то очевидно для собственного значения λ получим следующее выражение

$$\lambda = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_1\omega_2}(A\varphi, \varphi) \pm \sqrt{\frac{(\omega_2 - \omega_1)^2}{4\omega_1^2\omega_2^2}(A\varphi, \varphi)^2 + \frac{(A^*A\varphi, \varphi)}{\omega_1\omega_2}}$$

и для доказательства нашего утверждения остается лишь заметить, что, как известно, $(A\varphi, \varphi)$ всегда вещественно, а $(A^*A\varphi, \varphi)$ неотрицательно.

Рассмотрим теперь два различных собственных значения λ_r и λ_s и пусть φ_1^r, φ_2^r какие-нибудь решения систем (2)—(3) при $\lambda = \lambda_r$, а ψ_1^s и ψ_2^s произвольное решение системы (4)—(5) при $\lambda = \lambda_s$.

Имеем

$$A\varphi_1^r - \lambda_r\omega_1\varphi_1^r = \varphi_2^r, \quad A\psi_2^s + \lambda_s\omega_2\psi_2^s = -\psi_1^s.$$

Умножая скалярно первое уравнение на ψ_1^s, а второе на φ_2^r и складывая, получим, принимая во внимание (3) и (5)

$$\lambda_r\omega_1(\varphi_1^r, \psi_1^s) - \lambda_s\omega_2(\varphi_2^r, \psi_2^s) = (A\varphi_1^r, \psi_1^s) + (\varphi_2^r, A\psi_2^s) =$$

$$= (\varphi_1^r, A^*\psi_1^s) + (A^*\varphi_2^r, \psi_2^s) = (\varphi_1^r, \lambda_s\omega_1\psi_1^s) + (-\lambda_r\omega_2\varphi_2^r, \psi_2^s)$$

и окончательно

$$(\lambda_r - \lambda_s)\{\omega_1(\varphi_1^r, \psi_1^s) + \omega_2(\varphi_2^r, \psi_2^s)\} = 0,$$

откуда следует

$$\omega_1(\varphi_1^r, \psi_1^s) + \omega_2(\varphi_2^r, \psi_2^s) = 0 \quad (r \neq s). \tag{8}$$

Покажем теперь, что последнее выражение всегда можно считать отличным от нуля, если φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 рассматриваются при одном и том же значении λ. Для этого при заданных φ_1, φ_2 определим элементы ψ_1 и ψ_2 по формуле (6). Умножая теперь скалярно уравнение (3) на φ_1 получим $0 = (A^*\varphi_2 + \lambda\omega_2\varphi_2, \varphi_1) = (A^*\varphi_2, \varphi_1) + \lambda\omega_2(\varphi_2, \varphi_1) = (\varphi_2 A\varphi_1) + \lambda\omega_2(\varphi_2, \varphi_1) = (\varphi_2, \lambda\omega_1\varphi_1 + \varphi_2) + \lambda\omega_2(\varphi_2, \varphi_1) = \lambda(\omega_1 + \omega_2)(\varphi_2, \varphi_1) + \|\varphi_2\|^2$, откуда, учитывая (6), находим

$$(\varphi_2, \psi_2) = \frac{\|\varphi_2\|^2}{\lambda(\omega_1 + \omega_2)}. \tag{9}$$

Далее, умножив скалярно обе части уравнения (5) на ψ_2, будем иметь

$$0 = (A^*\psi_1 - \lambda\omega_1\psi_1, \psi_2) = (A^*\psi_1, \psi_2) - \lambda\omega_1(\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, A\psi_2) - \lambda\omega_1(\psi_1, \psi_2) =$$
$$= (\psi_1, -\lambda\omega_2\psi_2 - \psi_1) - \lambda\omega_1(\psi_1, \psi_2) = -\lambda(\omega_1 + \omega_2)(\psi_1, \psi_2) - \|\psi_1\|^2,$$

откуда, учитывая (6), находим на основании (9)

$$\omega_1(\varphi_1, \psi_1) + \omega_2(\varphi_2, \psi_2) = \frac{\omega_1\|\psi_1\|^2 + \omega_2\|\varphi_2\|^2}{\lambda(\omega_1 + \omega_2)}, \tag{10}$$

откуда и следует наше утверждение, ибо если последнее выражение равно нулю, то из (6) следует $\varphi_1 = 0$, что невозможно. К последнему заключению можно было прийти и на основании следующей формулы, которую мы используем в дальнейшем

$$\|\psi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2 = \lambda^2(\omega_1 + \omega_2)^2 \|\varphi_1\|^2. \tag{11}$$

Для доказательтва этой формулы достаточно заметить, что, как нетрудно убедиться, φ_2 всегда ортогонально к ψ_1.

Итак, если $\lambda_r \neq \lambda_s$, то всегда $(\Phi_r, \Psi_s) = 0$. Если мы покажем, что при этом можно считать $(\Phi_r, \Psi_r) = 1$, то этим будет доказано, что последовательности $\{\Phi_r\}$ и $\{\Psi_r\}$ образуют биортогональную систему в пространстве $\tilde{H}$. Затруднение может возникнуть лишь в случае кратного спектра, ибо если кратность собственного значения равна единице, то, как мы показали выше, всегда можно считать $(\Phi, \Psi) \neq 0$. Рассмотрим теперь кратное собственное значение и пусть φ_1^k, φ_2^k соответствующие элементы, причем $\varphi_1^{(1)}, \varphi_1^{(2)} \cdots, \varphi_1^{(n)}$ линейно-независимы. Очевидно, что и элементы $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ будут линейно независимы в $\tilde{H}$. Элементы $\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_n$ подберем теперь специальным образом, а именно определим их по соответствующим $\{\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}\}$, пользуясь формулой (6). Пусть теперь $\Phi = \alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \cdots + \alpha_n\Phi_n$. Очевидно, что $\Psi = \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 + \cdots + \alpha_n\Psi_n$ определяется по элементу Φ согласно формуле (6) и поэтому на основании доказанного выше $(\Phi, \Psi) \neq 0$, если $\Phi \neq 0$. Отсюда следует, что равенство

$$(\alpha_1\Phi_1 + \alpha_2\Phi_2 + \cdots + \alpha_n\Phi_n, \alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 + \cdots + \alpha_n\Psi_n) = 0$$

возможно тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Предположим теперь для простоты, что рассматриваемое собственное значение двукратно. Пусть Φ_1 и Φ_2 соответствующие линейно-независимые элементы, а Ψ_1 и Ψ_2 построены по ним указанным выше образом.

Положим $\tilde{\Phi}_1 = \Phi_1$, $\tilde{\Psi}_1 = \Psi_1$

$$\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \alpha\Phi_1, \quad \tilde{\Psi}_2 = \Psi_2 + \beta\Psi_1.$$

Легко видеть, что поскольку $(\Phi_1, \Psi_1) \neq 0$, то α и β однозначно определятся из условий $(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_2) = 0$ $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_1) = 0$. При этом, очевидно, $(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1) \neq 0$ и нам остается лишь показать, что $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2) \neq 0$.

Для доказательства определим значения α и β и сосчитаем выражение $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2)$. Получим

$$(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2) = \frac{1}{\overline{(\Phi_1, \Psi_1)}} \begin{vmatrix} (\Phi_1, \Psi_1), & (\Phi_2, \Psi_1) \\ (\Phi_1, \Psi_2), & (\Phi_2, \Psi_2) \end{vmatrix}.$$

Допустим теперь, что $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2) = 0$. Тогда из предыдущего следует существование таких постоянных λ_1, λ_2, не равных одновременно нулю, что $\lambda_1(\Phi_1, \Psi_1) + \lambda_2(\Phi_2, \Psi_1) = 0$, $\lambda_1(\Phi_1, \Psi_2) + \lambda_2(\Phi_2, \Psi_2) = 0$. Умножая первое уравнение на $\overline{\lambda}_1$, а второе на $\overline{\lambda}_2$, получим

$$\lambda_1\overline{\lambda}_1(\Phi_1, \Psi_1) + \lambda_2\overline{\lambda}_1(\Phi_2, \Psi_1) + \lambda_1\overline{\lambda}_2(\Phi_1, \Psi_2) + \lambda_2\overline{\lambda}_2(\Phi_2, \Psi_2) = 0$$

Но легко видеть, что выражение в левой части совпадает с $(\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2, \lambda_1\Psi_1 + \lambda_2\Psi_2)$, а это противоречит тому, что, как было показано выше, последнее выражение может обратиться в нуль лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Этим наша теорема доказана полностью.

Заметим, что в работе ([3]) условие биортогональности использовано по существу в виде $(\omega_1 - \omega_2)(A\varphi_1^k, \varphi_1^n) + \omega_1\omega_2(\lambda_k + \lambda_n)(\varphi_1^k, \varphi_1^n) = 0$ $(\lambda_k \neq \lambda_n)$. Можно без труда получить и следующее условие

$$(\varphi_1^k, A^*A\varphi_1^n) + \omega_1\omega_2(\lambda_k\varphi_1^k, \lambda_n\varphi_1^n) = 0 \quad (\lambda_k \neq \lambda_n).$$

Далее, необходимо заметить, что вообще нельзя ожидать, чтобы биортогональная система $\{\Phi_k\}$, $\{\Psi_k\}$ была полна в $\tilde{H}$ в обычном смысле, т. е. чтобы любой элемент $\{f_1, f_2\}$ пространства $\tilde{H}$ было возможно разложить по системе Φ_k или Ψ_k.

Попытаемся выяснить этот вопрос в простейшем случае, когда $\omega_1 = \omega_2 = 1$. Предположим, что самосопряженный оператор A^*A имеет полную систему собственных функций. Вместо систем (2)—(3) и (4)—(5) получим системы

$$A\varphi_1 - \lambda\varphi_1 = \varphi_2, \quad A^*\varphi_2 + \lambda\varphi_2 = 0, \tag{12}$$

$$A\psi_2 + \lambda\psi_2 = -\psi_1, \quad A^*\psi_1 - \lambda\psi_1 = 0. \tag{13}$$

Легко видеть, что если λ_k есть собственное значение, то и $-\lambda_k$ является собственным значением. Элементы φ и ψ, отвечающие положительному собственному значению λ_k, мы будем отмечать индексом k сверху и те же элементы, соответствующие собственному значению $-\lambda_k$, будут отмечаться индексом $-k$. Можно без труда убедиться, что мы вправе принять для отрицательных λ_k

$$\varphi_2^{-k} = \psi_1^k, \quad \varphi_1^{-k} = -\psi_2^k. \tag{14}$$

Очевидно, кроме того, что

$$\psi_2^{-k} = \psi_2^k, \; \varphi_1^{-k} = \varphi_1^k. \tag{15}$$

Допустим теперь, что

$$\{f_1, f_2\} = \sum c_k \{\varphi_1^k, \varphi_2^k\}. \tag{16}$$

Тогда, положив

$$\alpha_k = \frac{(f_1, \psi_1^k)}{(\varphi_1^k, \psi_1^k) + (\varphi_2^k, \psi_2^k)}, \quad \beta_k = \frac{(f_2, \psi_2^k)}{(\varphi_1^k, \psi_1^k) + (\varphi_2^k, \psi_2^k)}, \tag{17}$$

будем иметь

$$c_k = \alpha_k + \beta_k. \tag{18}$$

Очевидно, для справедливости (16) необходимо и достаточно, чтобы было

$$f_1 = \sum c_k\varphi_1^k, \tag{19}$$

$$f_2 = \sum c_k \varphi_2^k. \tag{20}$$

Займемся сперва первым рядом. Мы рассмотрим в отдельности ряды $\sum \alpha_k \varphi_1^k$ и $\sum \beta_k \varphi_1^k$. Заметим прежде всего, что, как это нетрудно проверить,

$$(\varphi_1^k, \psi_1^k) + (\varphi_2^k, \psi_2^k) = 2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2 = 2\lambda_k \| \varphi_1^{-k} \|^2, \tag{21}$$

и поэтому

$$\alpha_k = \frac{(f_1, \psi_1^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2}, \quad \beta_k = \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2}. \tag{22}$$

Теперь, объединяя члены, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям, получим

$$\sum \alpha_k \varphi_1^k = \sum_{k>0} \left\{ \frac{(f_1, \psi_1^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^k - \frac{(f_1, \psi_1^{-k})}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^{-k} \right\} =$$

$$= \sum_{k>0} \frac{1}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \{ (f_1, \psi_1^k) \varphi_1^k - (f_1, \psi_1^{-k}) \varphi_1^{-k} \}.$$

С другой стороны нетрудно видеть, что

$$\psi_1^k - \psi_1^{-k} = 2\lambda_k \varphi_1^k \tag{23}$$

и предыдущее равенство может быть переписано в виде

$$\sum \alpha_k \varphi_1^k = \sum_{k>0} \frac{(f_1, \varphi_1^k) \varphi_1^k}{\| \varphi_1^k \|^2}.$$

Вспомнив, что система φ_1^k при $k>0$ полна в H, заключаем отсюда, что при любом $f^1 \in H$

$$f_1 = \sum \alpha_k \varphi_1^k. \tag{24}$$

Рассмотрим теперь ряд $\sum \beta_k \varphi_1^k$. Используя (15), без труда найдем, снова объединяя члены, соответствующие положительным и отрицательным собственным значениям

$$\sum \beta_k \varphi_1^k = \sum_{k>0} \left\{ \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^k + \frac{(f_2, \psi_2^{-k})}{2\lambda_{-k} \| \varphi_1^{-k} \|^2} \varphi_1^{-k} \right\} =$$

$$= \sum_{k>0} \left\{ \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^k - \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^k \right\} = 0. \tag{25}$$

Проверим теперь справедливость разложения (20). Для этого рассмотрим сперва ряд $\sum \beta_k \varphi_2^k$. Имеем, объединяя, как и выше, члены, соответствующие противоположным по знаку собственным значениям

$$\sum \beta_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \left\{ \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \varphi_2^k + \frac{(f_2, \psi_2^{-k})}{2\lambda_{-k} \| \varphi_1^{-k} \|^2} \varphi_2^{-k} \right\}.$$

Приняв во внимание (14) и (15), а также формулу (6), без труда найдем

$$\sum \beta_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} (\varphi_2^k - \varphi_2^{-k}) = \sum_{k>0} \frac{(f_2, \psi_2^k)}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \cdot 2\lambda_k \psi_2^k,$$

и окончательно (снова используя формулу (6))

$$\sum \beta_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \frac{(f_2, \varphi_1^k)}{\| \varphi_1^k \|^2} \varphi_1^k.$$

Отсюда следует, очевидно

$$f_2 = \sum \beta_k \varphi_2^k. \tag{26}$$

Наконец, перейдем к рассмотрению ряда $\sum \alpha_k \varphi_2^k$. Так же, как и выше, учитывая еще (14), убедимся в том, что

$$\sum \alpha_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \frac{1}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} \left\{ (f_1, \psi_1^k) \psi_1^{-k} - (f_1, \psi_1^{-k}) \psi_1^k \right\}.$$

Заметив теперь, что

$$(f_1, \psi_1^k) \psi_1^{-k} - (f_1, \psi_1^{-k}) \psi_1^k =$$

$$= \frac{(f_1, \psi_1^k - \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\} - (f_1, \psi_1^k + \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k - \psi_1^{-k}\}}{2},$$

последний ряд перепишем в виде

$$\sum \alpha_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \frac{1}{4\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} (f_1, \psi_1^k - \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\} -$$

$$- \sum_{k>0} \frac{1}{4\lambda_k \| \varphi_1^k \|^2} (f_1, \psi_1^k + \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k - \psi_1^{-k}\}. \tag{27}$$

Переходя к исследованию этого ряда, покажем прежде всего, что последовательности $\{\psi_1^k - \psi_1^{-k}\}$ и $\{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\}$ образуют ортогональные системы. Ортогональность первой системы есть следствие формулы (23). Рассмотрим вторую систему. Легко видеть, что

$$A^* (\psi_1^k + \psi_1^{-k}) = \lambda_k (\psi_1^k - \psi_1^{-k}), \tag{28}$$

откуда следует, что $A^* (\psi_1^k + \psi_1^{-k}) \in D_A$ и, как в этом нетрудно убедиться,

$$AA^* (\psi_1^k + \psi_1^{-k}) = \lambda_k^2 (\psi_1^k + \psi_1^{-k}). \tag{29}$$

Пусть теперь $\lambda_k^2 \neq \lambda_m^2$. Имеем

$$AA^*(\psi_1^k + \psi_1^{-k}) = \lambda_k^2(\psi_1^k + \psi_1^{-k}), \quad AA^*(\psi_1^m + \psi_1^{-m}) = \lambda_m^2(\psi_1^m + \psi_1^{-m}).$$

Умножая первое уравнение скалярно на $\psi_1^m + \psi_1^{-m}$, а второе на $\psi_1^k + \psi_1^{-k}$ и вычитая, получим

$$(AA^*(\psi_1^k + \psi_1^{-k}), \psi_1^m + \psi_1^{-m}) - (\psi_1^k + \psi_1^{-k}, AA^*(\psi_1^m + \psi_1^{-m})) =$$
$$= (\lambda_k - \lambda_m^2)(\psi_1^k + \psi_1^{-k}, \psi_1^m + \psi_1^{-m}).$$

С другой стороны, в силу самого определения сопряженного оператора, левая часть равна нулю, откуда и следует ортогональность системы $\{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\}$. Сосчитаем теперь норму элемента $\psi_1^k + \psi_1^{-k}$. Из (29) получаем

$$(AA^*(\psi_1^k + \psi_1^{-k}), \ \psi_1^k + \psi_1^{-k}) = \lambda_k^2 \| \psi_1^k + \psi_1^{-k} \|^2,$$

откуда

$$\|A^*(\psi_1^k + \psi_1^{-k})\|^2 = \lambda_k^2 \| \psi_1^k + \psi_1^{-k} \|^2.$$

А теперь, в силу (28) и (23), получаем

$$\| \psi_1^k + \psi_1^{-k} \|^2 = \| \psi_1^k - \psi_1^{-k} \|^2 = 4\lambda_k^2 \| \varphi_1^k \|^2. \tag{30}$$

Вернемся теперь к ряду (27). Принимая во внимание, наряду с (28), очевидное равенство $A^*(\psi_1^k - \psi_1^{-k}) = \lambda_k(\psi_1^k + \psi_1^{-k})$, а также предполагая, что $f_1 \in D_A$, перепишем ряд (27) в виде

$$\sum \alpha_k \varphi_2^k = \sum_{k>0} \frac{1}{4\lambda_k^2 \| \varphi_1^k \|^2} (Af_1, \psi_1^k + \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\} -$$

$$- \sum_{k>0} \frac{1}{4\lambda_k^2 \| \varphi_1^k \|^2} (Af_1, \psi_1^k - \psi_1^{-k}) \{\psi_1^k - \psi_1^{-k}\}.$$

Заметив теперь, что системы $\left\{\dfrac{\psi_1^k - \psi_k^{-k}}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|}\right\}$ и $\left\{\dfrac{\psi_1^k + \psi_1^{-k}}{2\lambda_k \| \varphi_1^k \|}\right\}$ ортонормальны, мы видим, что

$$\alpha_k \varphi_2^k = 0. \tag{31}$$

Правда, последняя система не полна, но очевидно, что Af_1 разлагается по этой системе. В самом деле, если бы Af_1 было ортогонально ко всем $\{\psi_1^k + \psi_1^{-k}\}$, то мы бы получили $(f_1, A^*(\psi_1^k + \psi_1^{-k})) = 0$, откуда в силу (28) имели бы $(f_1, f_1^k - f_1^{-k}) = 0$. Тогда из полноты системы $\{\psi_1^k - \psi_1^{-k}\}$ следовало бы $f_1 = 0$. Итак, на основании (24), (25), (26) и (31) мы можем утверждать, что если $f_1 \in D_A$; а $f_2 \in H$, то разложение (16) имеет место. Если, кроме того, предположить, что элемент f_2 имеет вид $f_2 = A^*f$, то легко видеть, что все рассмотренные ряды сильно сходятся без группировки членов, соответствующих положительным и отрицательным собственным значениям.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Մի բիօրթոգոնալ սիստեմի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է

$$(A^* + \lambda\omega_2 E)(A - \lambda\omega_1 E)\varphi = 0 \qquad (1)$$

հավասարման սեփական ֆունկցիաների վերաբերյալ խնդիրը, որտեղ A–ն սիմետրիկ օպերատոր է H հիլբերտյան տարածության մեջ և ω_1, ω_2 թվերը դրական են։

Դիցուք (1) խնդրի φ_1^n սեփական էլեմենտների հետ միասին դիտարկվում են

$$\varphi_2^k = A\varphi_1^k - \lambda_k\omega_1\varphi_1^k, \quad \psi_1^k = \lambda_k(\omega_1 + \omega_1)\varphi_1^k + \varphi_2^k, \quad \psi_2^k = -\varphi_1^k$$

էլեմենտները։

Այնուհետև ենթադրենք $\tilde{H} = H \times H$-ը մի նոր հիլբերտյան տարածություն է, որի էլեմենտները հանդիսանում են H տարածության էլեմենտների (f, g) կարգավորված զույգերը, իսկ սկալյար արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$((f, g), (f_1, g_1)) = \omega_1 (f, f_1) + \omega_2 (g, g_1)։$$

Նշանակենք $\Phi_k = \{\varphi_1^k, \varphi_2^k\}$ և $\Psi_k = \{\psi_1^k, \psi_2^k\}$։

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալը՝

(1) խնդրի λ_k սեփական արժեքները միշտ իրական են։

$\{\Phi_k\}$ և $\{\Psi_k\}$ հաջորդականությունները միապատիկ սպեկտրի դեպքում $\tilde{H}$ տարածության մեջ կազմում են բիօրթոգոնալ սիստեմ, իսկ բազմապատիկ սեփական արժեքների դեպքում Φ_k և Ψ_k էլեմենտների հարմար ընտրության միջոցով $\{\Phi_k\}$, $\{\Psi_k\}$ սիստեմը կարելի է դարձնել բիօրթոգոնալ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Лангер*, Trans. Amer. Math. Soc., 31, 868 (1929). [2] *П. Ф. Папкович*. Строительная механика корабля, т. II, Л., 1941. [3] *Н. Х. Арутюнян*, *М. М. Джрбашян*, *Р. А. Александрян*, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат наук, т. X, № 1 (1957). [4] *М. М. Джрбашян*, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. X, № 4 (1957).