ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVI 1958 5

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

# О вариационных уравнениях теории ползучести

(Представлено Н. Х. Арутюняном 10. III. 1958)

Цель настоящего сообщения—обобщить некоторые вариационные уравнения идеально упругого тела для материалов, обладающих свойством ползучести (бетон, пластмасса и др.).

1°. Между компонентами деформации $\varepsilon_x^*(t)$,... и напряжений $\sigma_x^*(t)$,... имеются зависимости ([1]):

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{1}{E(t)}\Big\{(1+\nu)\,\sigma_x^*(t) - \nu S^*(t) -$$

$$- \int_{\tau_0}^{t} \left[(1+\nu)\sigma_x^*(\tau) - \nu S^*(\tau)\right] K(t,\tau)\, d\tau\Big\}, \tag{1}$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = \frac{1}{G(t)}\left\{\tau_{xy}^*(t) - \int_{\tau_0}^{t} \tau_{xy}^*(\tau)\, K(t,\tau)\, d\tau\right\},$$

$$(x, y, z),$$

где $S^*(t) = \sigma_x^*(t) + \sigma_y^*(t) + \sigma_z^*(t)$, $E(t)$ — модуль мгновенной деформации, $\nu$—коэффициент Пуассона, $G(t) = \dfrac{E(t)}{2(1+\nu)}$,

$$K(t,\tau) = E(t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right]\right\}, \tag{2}$$

$\varphi(\tau) = \dfrac{A_1}{\tau} + C_0$, а $A_1$, $C_0$ и $\gamma$ — параметры, характеризующие свойства ползучести материала.

Выражая компоненты напряжения из (1) через деформации, будем иметь:

$$\sigma_x^*(t) = \frac{E(t)}{1+\nu}\left[\varepsilon_x^*(t) + \frac{\nu\theta^*(t)}{1+2\nu}\right] + \int_{\tau_0}^{t} \frac{E(\tau)}{1+\nu}\left[\varepsilon_x^*(\tau) + \frac{\nu\theta^*(\tau)}{1-2\nu}\right] R(t,\tau)\, d\tau, \tag{3}$$

$$\tau^*_{xy}(t) = G(t)\,\gamma^*_{xy}(t) + \int\limits_{\tau_0}^{t} G(\tau)\,\gamma^*_{xy}(\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau,$$

$$(x,\ y,\ z),$$

где $\theta^*(t) = \varepsilon^*_x(t) + \varepsilon^*_y(t) + \varepsilon^*_z(t)$, а $R(t,\tau)$ резольвента ядра $K(t,\tau)$, величина которой определена в работе ([2]). Она имеет вид:

$$R(t,\tau) = -\gamma\varphi(\tau)\,E(\tau) - \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \frac{D(\tau)}{E(\tau)} \int\limits_{\tau}^{t} E(\xi)\,e^{-\int\limits_{\tau}^{\xi}\eta(\xi)\,d\xi}\,d\xi, \tag{4}$$

где $\eta(t) = \gamma\,[1 + \varphi(t)\,E(t)]$, $D(t) = \eta'(t) + \eta(t)\,[\eta(t) - \gamma]$.

2°. Пусть тело, материал которого имеет свойства ползучести, находится в равновесии под действием заданных сил и перемещений. В некоторый фиксированный момент $t$ сообщим точкам тела бесконечно малые и непрерывные перемещения $\delta u^*(t)$, $\delta v^*(t)$, $\delta w^*(t)$, совместимые с граничными условиями.

Согласно началу возможных перемещений Лагранжа, при отсутствии массовых сил имеем

$$\iiint\limits_{v} [\sigma^*_x(t)\,\delta\varepsilon^*_x(t) + \cdots + \tau^*_{xz}(t)\delta\gamma^*_{xz}(t)]\,dv - \delta A(t) = 0, \tag{5}$$

где

$$\delta A(t) = \iint\limits_{s} [X_\nu(t)\,\delta u^*(t) + Y_\nu(t)\,\delta v^*(t) + Z_\nu(t)\,\delta w^*(t)]\,ds \,-$$

приращение работы внешних сил.

Вводя функцию

$$W^*(t,\tau) = G(t)\Big\{\varepsilon^*_x(t)\,\varepsilon^*_x(\tau) + \varepsilon^*_y(t)\,\varepsilon^*_y(\tau) + \varepsilon^*_z(t)\,\varepsilon^*_z(\tau) +$$

$$+ \frac{\nu\theta^*(t)\,\theta^*(\tau)}{1-2\nu} + \frac{1}{2}\left[\gamma^*_{xy}(t)\,\gamma^*_{xy}(\tau) + \gamma^*_{yz}(t)\,\gamma^*_{yz}(\tau) + \gamma^*_{xz}(t)\,\gamma^*_{xz}(\tau)\right]\Big\} \tag{6}$$

и используя соотношения (3), после некоторых преобразований находим, что:

$$\sigma^*_x(t)\,\delta\varepsilon^*_x(t) + \cdots + \tau^*_{xz}(t)\,\delta\gamma^*_{xz}(t) =$$

$$= \delta\left[W^*(t,t) + 2\int\limits_{\tau_0}^{t} W^*(t,\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau\right]. \tag{7}$$

Если внешние силы не варьируем, из (5) и (7) получаем:

$$\delta\left\{\iiint_v \left[W^*(t,t) + 2\int_{\tau_0}^{t} W^*(t,\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau\right] dv - A(t)\right\} = 0. \tag{8}$$

Величина в фигурных скобках называется полной энергией тела.

Из уравнения (8) вытекают дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях и граничные условия.

Вторая вариация полной энергии положительна; действительно:

$$\delta^2 W^*(t,t) = 2G(t)\left\{[\delta\varepsilon_x^*(t)]^2 + \cdots + \frac{\nu}{1-2\nu}[\delta\theta^*(t)]^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\delta\gamma_{xy}^*(t)\right]^2 + \cdots\right\} > 0, \qquad \delta^2 W^*(t,\tau) = 0.$$

Таким образом, из всех возможных перемещений, удовлетворяющих граничным связям, в действительности имеют место те, при которых полная энергия тела имеет минимальное значение.

Формулы Грина можно написать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^*(t) &= \frac{\partial W^*(t,t)}{\partial \varepsilon_x^*(t)} + 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial W^*(t,\tau)}{\partial \varepsilon_x^*(t)} R(t,\tau)\,d\tau, \\ \tau_{xy}^*(t) &= \frac{\partial W^*(t,t)}{\partial \gamma_{xy}^*(t)} + 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial W^*(t,\tau)}{\partial \gamma_{xy}^*(t)} R(t,\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

3°. При варьировании напряженного состояния вариации напряжений $\delta\sigma_x^*(t), \cdots, \delta\tau_{xy}^*(t), \cdots$ и вариации внешних сил $\delta X_\nu(t)$, $\delta Y_\nu(t)$ $\delta Z_\nu(t)$ образуют уравновешенную систему. Сумма работ этих сил на действительных перемещениях равна нулю:

$$\iiint_v [\varepsilon_x^*(t)\,\delta\sigma_x^*(t) + \cdots + \gamma_{xz}^*(t)\delta\sigma_{xz}^*(t)]\,dv -$$

$$- \iint_s [u^*(t)\,\delta X_\nu(t) + v^*(t)\,\delta Y_\nu(t) + w^*(t)\,\delta Z_\nu(t)]\,ds = 0. \tag{10}$$

В случае, когда $\delta X_\nu(t) = \delta Y_\nu(t) = \delta Z_\nu(t) = 0$, имеем

$$\iiint_v [\varepsilon_x^*(t)\,\delta\sigma_x^*(t) + \cdots + \gamma_{xz}^*(t)\,\delta\tau_{xz}^*(t)]\,dv = 0. \tag{11}$$

Аналогично (6), вводя функцию

$$U^*(t,\tau) = \frac{1}{2G(t)}\left\{\frac{1}{2}\left[\sigma_x^*(t)\,\sigma_x^*(\tau) + \sigma_y^*(t)\,\sigma_y^*(\tau) + \sigma_z^*(t)\,\sigma_z^*(\tau) + \right.\right.$$

$$+\frac{\nu S^*(t)\,S^*(\tau)}{1+\nu}\Bigg] + \tau^*_{xy}(t)\,\tau^*_{xy}(\tau) + \tau^*_{yz}(t)\,\tau^*_{yz}(\tau) + \tau^*_{xz}(t)\,\tau^*_{xz}(\tau)\Bigg\} \qquad (12)$$

и используя соотношения (1), преобразованием получим:

$$\varepsilon^*_x(t)\delta\sigma^*_x(t) + \cdots + \gamma^*_{xz}(t)\delta\tau^*_{xz}(t) =$$

$$= \delta\left[U^*(t, t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t, \tau)\,K(t, \tau)\,d\tau\right]. \qquad (13)$$

Тогда уравнение (11) напишется в виде

$$\delta\iiint_v \left[U^*(t, t) - 2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t, \tau)\,K(t, \tau)\,d\tau\right] dv = 0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) выражает начало Кастилиано для тел, обладающих свойством ползучести. Легко показать, что вторая вариация подинтегральной функции (14) положительна.

Из всех статически возможных распределений напряжений, соответствующих данным внешним силам, в действительности имеют место те, при которых потенциальная энергия тела имеет минимальное значение.

Формулы Кастилиано принимают вид:

$$\varepsilon^*_x(t) = \frac{\partial U^*(t, t)}{\partial\sigma^*_x(t)} - 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U^*(t, \tau)}{\partial\sigma^*_x(t)}\,K(t, \tau)\,d\tau,$$

$$\gamma^*_{xy}(t) = \frac{\partial U^*(t, t)}{\partial\tau^*_{xy}(t)} - 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U^*(t, \tau)}{\partial\tau^*_{xy}(t)}\,K(t, \tau)\,d\tau. \qquad (15)$$

Если к телу приложены сосредоточенные силы $P_n(t)$, то, исходя из (10) и (13) и вводя обозначение

$$U^*_0(t, \tau) = \iiint_v U^*(t, \tau)\,dv,$$

легко получить, что перемещение от этой силы будет

$$\Delta^*_n(t) = \frac{\partial U^*_0(t, t)}{\partial P_n(t)} - 2\int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U^*_0(t, \tau)}{\partial P_n(t)}\,K(t, \tau)\,d\tau. \qquad (16)$$

Формула (16) выражает теорему Кастилиано для тел, обладающих свойством ползучести. Она справедлива также для обобщенных сил и перемещений.

4°. По аналогии с вариационным уравнением Э. Рейснера ([6]), пишем

$$\delta\left\{\iiint_v \left[\varepsilon^*_x(t)\,\sigma^*_x(t) + \cdots + \gamma^*_{xz}(t)\,\tau^*_{xz}(t) - U^*(t, t) + \right.\right.$$

$$+2\int_{\tau_0}^{t} U^*(t,\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau\Bigg]\,dv - \iint_{s} [X_v(t)\,u^*(t) + Y_v(t)\,v^*(t) +$$

$$+ Z_v(t)\,w^*(t)]\,ds\Bigg\} = 0, \qquad (17)$$

причем деформация и напряжение варьируются независимо.

Делая преобразование, аналогичное ([8]), приходим к выводу, что уравнение (17) эквивалентно уравнению равновесия в напряжениях, граничным условиям и формулам Кастилиано (15).

5°. Если тело находится в равновесии, то работа внешних сил на произведенных ими перемещениях $u^*(t)$, $v^*(t)$, $w^*(t)$ выражается интегралом

$$A^*(t) = \iiint_{v} [\varepsilon_x^*(t)\,\sigma_x^*(t) + \cdots + \gamma_{xz}^*(t)\,\tau_{xz}^*(t)]\,dv. \qquad (18)$$

Подставляя компоненты деформаций из (3) в (18) и используя обозначение (6), находим

$$A^*(t) = 2\iiint_{v}\left[W^*(t,t) + \int_{\tau_0}^{t} W^*(t,\tau)\,R(t,\tau)\,d\tau\right]dv. \qquad (19)$$

С другой стороны, при помощи (1) и (12), из (18) получим вторую форму выражения $A^*(t)$:

$$A^*(t) = 2\iiint_{v}\left[U^*(t,t) - \int_{\tau_0}^{t} U^*(t,\tau)\,K(t,\tau)\,d\tau\right]dv. \qquad (20)$$

Последние два соотношения выражают формулы Клапейрона.

При огсутствии свойства ползучести ($K(t,\tau) \equiv R(t,\tau) \equiv 0$ или $t = \tau_0$) они совпадают с известной формулой Клапейрона для упругого тела.

Вышеприведенные формулы можно распространить также на стержневые системы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

## Սողքի տեսության վարիացիոն հավասարումների մասին

*Հոդվածում ընդհանրացվում են առաձգականության տեսության մի քանի վարիացիոն հավասարումները սողքի հատկությամբ օժտված նյութերի համար (բետոն, պլաստմասսա և այլն)։*

*Օգտագործելով Լագրանժի հնարավոր տեղափոխումների սկզբունքը և սողքի տեսության (¹) հիմնական առնչությունները, ստացվում է սողք ունեցող մարմնի լրիվ էներգիայի մինիմումի վարիացիոն հավասարումը (8)։ Այդ հավասարման մեջ պարունակվող*

$W^*(t, \tau)$ ֆունկցիան, երբ $\tau = t$ համընկնում է առաձգական պոտենցիալի հետ (արտահայտված դեֆորմացիաներով)։

Սողքի հատկություն ունեցող մարմնի համար Կաստիլյանոյի սկզբունքը արտահայտվում է (14) հավասարումով։ $U^*(t, \tau)$ ֆունկցիան, երբ $\tau = t$ ներկայացնում է առաձգական պոտենցիալը (արտահայտված լարումներով)։ Կաստիլյանոյի բանաձևը և թեորեմը համապատասխանաբար արտահայտվում են (15) և (16) առնչություններով։

Արտաքին ուժերի կատարած աշխատանքի մասին գոյություն ունեցող Կլապեյրոնի բանաձևը սողքով օժտված մարմինների համար ունի (19) կամ (20) տեսքը։

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952. [2] *М. А. Задоян*, „Известия" АН АрмССР (серия физико-математических наук), т. XI, № 1 (1958). [3] *Э. Рейснер*, Journal of Mathematics and Physics, т. 29 (1950).