ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVI 1958 5

МАТЕМАТИКА

А. А. Талалян

Об интегральном представлении измеримых функций с ядрами, порождающими унитарные преобразования пространства $L_2(0, \infty)$

(Представлено М. М. Джрбашяном 18. III. 1958)

§ 1. Пусть $K(x, t)$ и $L(x, t)$ являются ядрами унитарных преобразований пространства $L_2(0, \infty)$ такие, что для любой функции $f(x) \in L_2(0, \infty)$ имеет место

$$\begin{gathered} \underset{a \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^a K(x, t) f(t)\, dt = g(x), \\ \underset{a \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^a L(x, t)\, g(t)\, dt = f(x)^{*}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

В силу унитарности преобразований будет

$$\|g\|_{(0, \infty)} = \|f\|_{(0, \infty)}. \tag{1.2}$$

Следовательно, для любого $a > 0$ имеем

$$\begin{gathered} \left\| \int_0^a K(x, t) f(t)\, dt \right\| = \|f_a\| \leqslant \|f\| = \|g\|, \\ \left\| \int_0^a L(x, t)\, g(t)\, dt \right\| = \|g_a\| \leqslant \|g\| = \|f\|, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{при } x > a \end{cases} \tag{1.4}$$

---

* Как обычно, запись $\underset{a \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}$ означает предел в смысле сходимости в L_2 при $a \to \infty$.

$$g_a(x)=\begin{cases} g(x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant a \\ 0 & \text{при } x>a \end{cases} \tag{1.5}$$

Мы предполагаем, что для любых $a>0$ и $b>0$ $(a, b\neq+\infty)$ имеет место

$$\int_0^a\int_0^b K^2(x,t)\,dxdt<+\infty,\qquad \int_0^a\int_0^b L^2(x,t)\,dxdt<+\infty. \tag{1.6}$$

Целью настоящей работы является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. Пусть $K(x,t)$ и $L(x,t)$ функции, определенные при $0\leqslant x+\infty$ и $0\leqslant t<+\infty$, удовлетворяющие соотношениям (1.1), (1.2) *и* (1.6).

Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, определенной при $0\leqslant x<+\infty$, существует измеримая функция $\tau(x)$, интегрируемая с квадратом на каждом конечном интервале и обладающая тем свойством, что выражение

$$\int_0^a L(x,t)\,\tau(t)\,dt$$

сходится по мере при $a\to\infty$ на любом конечном интервале, лежащем $[0,+\infty)$, к $f(x)$.

В случае, когда $f(x)$ почти везде конечная функция, имеет место более сильная теорема, чем теорема 1.

Для того, чтобы сформулировать эту теорему, введем следующее

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти везде конечных измеримых функций сходится в среднем к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в обобщенном смысле, если для любого $\varepsilon>0$ существует множество $E\subset[a,b]$ такое, что $\operatorname{mes}E>b-a-\varepsilon$ и последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на множестве E.

Теорема 2. Пусть $K(x,t)$ и $L(x,t)$ функции, определенные при $0\leqslant x<+\infty$ и $0\leqslant t<+\infty$, удовлетворяющие соотношениям (1.1), (1.2) *и* (1.6).

Тогда для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной при $0\leqslant x<+\infty$, существует измеримая функция $\tau(x)$, интегрируемая с квадратом на каждом конечном интервале и обладающая тем свойством, что выражение

$$\int_0^a L(x,t)\,\tau(t)\,dt$$

сходится в среднем в обобщенном смысле на каждом конечном интервале, лежащем в $[0,+\infty)$, к $f(x)$.

Имеет место также следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $K(x, t)$ *и* $L(x, t)$ *функции, определенные при* $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant t < +\infty$ *и удовлетворяющие соотношениям* (1.1), (1.2) *и* (1.6).

Тогда существует отличная от нуля измеримая функция $\tau(x)$, *интегрируемая с квадратом на каждом конечном интервале и обладающая тем свойством, что выражение*

$$\int_0^a L(x, t)\tau(t)\,dt$$

сходится в среднем в обобщенном смысле на любом конечном интервале, лежащем в $[0, +\infty)$, *к нулю.*

При доказательстве этих теорем применяется метод, приведенный в работе ([1]), где доказана следующая

Теорема. Если $\{\varphi_n(x)\}$ *система функций, определенных на измеримом множестве* $G \subset [0, 1]$, $\operatorname{mes} G > 0$, *и образующих нормированный базис в пространстве* $L_p(G)$, $p > 1$, *то для любой измеримой функции* $f(x)$, *определенной на* G, *существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который сходится по мере на множестве G *к* $f(x)$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доказательство теорем 1, 2, 3 основывается на следующей лемме.

Лемма. Пусть $K(x, t)$ *и* $L(x, t)$ *функции, определенные при* $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant t < +\infty$ *и удовлетворяют соотношениям* (1)—(6).

Пусть $f(x) \in L_2(0, \infty)$, $f(x) = 0$ *при* $x \overline{\in} E_0 \subset \Delta$ *и* $\Delta = (\alpha, \beta)$ *конечный интервал.*

Тогда для любых наперед заданных чисел $\varepsilon > 0$ *и* $A > \beta$ *можно определить функцию* $F(x) \in L_2(0, \infty)$ *и множество* e_0, *обладающие следующими свойствами:*

α) $$F(x) = f(x) \text{ при } x \overline{\in} e_0,\quad e_0 \subset E_0 \text{ и } \operatorname{mes} e_0 < \varepsilon.$$

β) $$\|G(x)\|_{(0, A)} < \varepsilon,$$

где $$G(x) = \int_0^{\infty} K(x, t) F(t)\,dt = \int_A K(x, t) F(t)\,dt.$$

γ) *Для любого множества* $e \subset Ce_0 = (0, A) - e_0$ *имеет место неравенство*

$$\left\| \int_0^a L(x, t) G(t)\, dt \right\|_e < \varepsilon + \| f \|_e$$

для любого $a > 0$.

Теоремы 1, 2 и 3 имеют место также в том случае, если вместо унитарности преобразований пространства $L_2(0, \infty)$, осуществляемых ядрами $L(x, t)$ и $h(x, t)$, потребовать, чтобы имело место следующее свойство.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ такое, что, как только $\| f \|_{(0, \infty)} < \delta$, имеем

$$\left\| \int_0^a K(x, t) f(t)\, dt \right\|_{(0, \infty)} < \varepsilon, \quad \left\| \int_0^a L(x, t) f(t)\, dt \right\|_{(0, \infty)} < \varepsilon$$

для любого положительного числа a.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

Չափելի ֆունկցիաների ինտեգրալ ներկայացման մասին, որտեղ ներկայացման կորիզները առաջացնում են $L_2(0, \infty)$ տարածության ունիտար ձևափոխություններ

Դիցուք $K(x, t)$, $L(x, t)$ *ֆունկցիաները հանդիսանում են* $L_2(0, \infty)$ *տարածության ունիտար ձևափոխությունների կորիզներ, այսինքն, ցանկացած* $f(x) \in L_2(0, \infty)$ *ֆունկցիայի համար տեղի ունի*

$$\begin{aligned} &\underset{a \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_0^a K(x, t) f(t)\, dt = g(x), \\ &\underset{a \to \infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_0^a L(x, t) g(t)\, dt = f(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Ձևափոխությունների ունիտարության պատճառով

$$\| g(x) \|_{(0, \infty)} = \| f(x) \|_{(0, \infty)}. \tag{2}$$

Ենթադրվում է, որ ցանկացած $a > 0$ *և* $b > 0$ *թվերի համար տեղի ունի*

$$\int_0^a \int_0^b K^2(x, t)\, dx dt < +\infty, \qquad \int_0^a \int_0^b L^2(x, t)\, dx dt < +\infty \tag{3}$$

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1. Ենթադրենք $K(x, t)$ և $L(x, t)$ ֆունկցիաները որոշված են, երբ $0 < x < +\infty$ և $0 < t < +\infty$ և բավարարում են (1), (2) և (3) առնչություններին:

Այդ դեպքում $[0, \infty)$-ի վրա որոշված ցանկացած $f(x)$ չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $[0, \infty)$-ի ամեն մի վերջավոր ինտերվալում քառակուսով ինտեգրելի $\tau(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\int_0^a L(x, t)\,\tau(t)\,dt$$

արտահայտությունը, երբ $a \to +\infty$, $[0, +\infty)$-ի ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ըստ չափի զուգամիտում է $f(x)$-ին:

Այն դեպքում, երբ $f(x)$-ը համարյա ամենուրեք վերջավոր է տեղի ունի ավելի ուժեղ թեորեմ

Թեորեմ 2. Ենթադրենք $K(x, t)$ և $L(x, t)$ ֆունկցիաները որոշված են, երբ $0 < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$ և բավարարում են (1), (2) և (3) պայմաններին:

Այդ դեպքում $[0, \infty)$-ի վրա որոշված համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիայի համար գոյություն ունի ամեն մի վերջավոր ինտերվալում քառակուսով ինտեգրելի $\tau(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\int_0^a L(x, t)\,\tau(t)\,dt$$

արտահայտությունը զուգամիտում է $f(x)$-ին $[0, \infty)$-ի ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ընդհանրացված միջին իմաստով, այսինքն ցանկացած $A > 0$ և $\varepsilon > 0$-ի համար գոյություն ունի չափելի բազմություն $E \subset [0, A)$ և $\operatorname{mes} E > A - \varepsilon$ այնպիսին, որ

$$\int_0^a L(x, t)\,\tau(t)\,dt$$

ինտեգրալը E բազմության վրա միջին իմաստով զուգամիտում է $f(x)$-ին, երբ $a \to \infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. А. Талалян*, О сходимости по мере рядов по базисам пространства L_p. „Известия" АН АрмССР (серия физико-математических наук), т. 10, № 1 (1957).