ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVI 1958 4

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора $-\triangle + q(x, y)$.

(Представлено М. М. Джрбашяном 3. I. 1958)

Обозначим через $q(x, y)$ действительную непрерывную функцую, определенную в некоторой односвязной конечной области D двухмерного эвклидова пространства E_2. Через Γ обозначим границу области D.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\triangle u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Так как по предположению функция $q(x, y)$ в области $D + \Gamma$ непрерывна, то она ограничена, поэтому не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что спектр задачи (1)—(2) не отрицателен. В самом деле, как известно, если функция $q(x, y)$ ограничена, то отрицательный спектр задачи (1)—(2) ограничен снизу. Поэтому, как легко видеть, число η можно подобрать так, чтобы спектр задачи

$$\triangle u + \{(\lambda + \eta) - q(x, y)\} u = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$$

оказался неотрицательным.

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2, \cdots$ собственные значения задачи (1)—(2), а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots \varphi_n(x, y), \cdots$—соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (1)—(2).

Пусть $f(x, y) \subset L_2(D)$. Положим

$$c_n = \iint_{(D)} f(x, y)\, \varphi_n(x, y)\, dxdy$$

и рассмотрим ряд

$$f(x, y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x, y), \tag{3}$$

вопрос о дифференцировании которого изучается в настоящей работе. Аналогичный вопрос для уравнения (1) в одномерном случае исследован нами [1], в трехмерном случае рассмотрен Б. М. Левитаном [2]. Им исследован аналогичный вопрос и для оператора Лапласа в пространствах любого измерения [3]. Основной результат во всех перечисленных случаях один и тот же и заключается в том, что каждое дифференцирование повышает порядок суммирования по М. Риссу на единицу. Кроме того, при повышении размерности пространства на единицу порядок суммирования по М. Риссу соответствующих производных ряда (3) повышается наполовину. Так, например, если первая производная ряда (3) в одномерном случае суммируется к первой производной разлагаемой функции по М. Риссу первого порядка [1], то в трехмерном случае приходится суммировать средними второго порядка [2], в двухмерном же случае, как доказано в настоящей работе, порядок суммирования оказывается равным $^3/_2$.

Положим

$$\Theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y)\, \varphi_n(u, v), \quad \mu > 0$$

и продолжим функцию $\Theta(x, y, u, v; \mu)$ для отрицательных μ нечетно. Используя результаты работы [4], где получены асимптотические оценки для производных спектральной функции $\Theta(x, y, u, v; \mu)$ при больших μ, в настоящей заметке установлены следующие результаты.

Введем обозначения:

$$S_s(x, y; \mu) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s c_n \varphi_n(x, y). \tag{4}$$

$$S_s^*(x, y; \mu) = \int_0^\mu \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^s d_\nu S^*(x, y; \nu), \tag{5}$$

где

$$S^*(x, y; \mu) = \iint_{(D)} f(u, v)\, \Theta^*(x, y, u, v; \mu)\, du dv,$$

причем $\Theta^*(x, y, u, v; \mu)$ — спектральная функция уравнения (1) для всего пространства E_2 при $q(x, y) \equiv 0$ и определяется формулой [3]:

$$\Theta^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{1}{2\pi} \mu\, \frac{I_1(\mu r)}{r},$$

где $I_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p, а r — расстояние точек (x, y) и (u, v).

Функция $S_s(x, y; \mu)$ — это среднее по М. Риссу порядка s разложения по собственным функциям оператора Шредингера, заданного в конечной части двухмерного пространства E_2, а функция $S_s^*(x, y; \mu)$ — среднее по М. Риссу порядка s разложения в обычный двухкратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{D}$ и равной нулю для остальных (x, y).

Через D^{α}_{xy} обозначим следующий оператор дифференцирования:

$$D^{\alpha}_{xy} \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y) \subset L_2(D)$. Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченные частные производные до порядка α включительно, то равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри D, имеет место равенство

$$\lim_{\mu \to \infty} \{D^{\alpha}_{xy} S_{\alpha+1/2}(x, y; \mu) + D^{\alpha}_{xy} S^{*}_{\alpha+1/2}(x, y; \mu)\} = 0,$$

т. е. разность между средними по М. Риссу порядка $\alpha + 1/2$ производных порядка α разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двухкратный интеграл Фурье функции, равной $f(x, y)$ для $(x, y) \in \overline{D}$ и равной нулю для остальных (x, y), стремится к нулю равномерно в каждой области, целиком содержащейся внутри области D.

Из предыдущей теоремы о равной суммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера и разложения в обычный двухкратный интеграл Фурье функции с интегрируемым квадратом, можно получить теорему о суммировании дифференцированных разложений по собственным функциям оператора Шредингера к соответствующим производным, если имеется соответствующая теорема для дифференцированных разложений в обычный двухкратный интеграл Фурье.

Теорема 2. Пусть функция $f(x, y) \subset L_2(D)$ и в окрестности точки (x_0, y_0) имеет непрерывные частные производные первого порядка и пусть функция $q(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) имеет ограниченные частные производные первого порядка. Тогда

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{\partial}{\partial x} S_{3/2}(x_0, y_0; \mu) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \tag{6}$$

т. е. первая производная разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера в точке (x_0, y_0) суммируема по методу М. Рисса порядка $3/2$ к значению $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$.

Если условия дифференцируемости, наложенные на $f(x, y)$ и $q(x, y)$, выполнены в некоторой замкнутой области d, целиком содержащейся внутри области D, то равенство (6) имеет место равномерно в d.

Если разлагаемая функция удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, то имеет место сходимость дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Шредингера. А именно, справедлива

Теорема 3. Пусть функция $f(x, y)$ в области D имеет вторые частные производные, причем $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(D)$ и пусть $f(x, y)$ удовлетворяет условию (2). Предположим, что в окрестности внутренней (по отношению к области D) точки (x_0, y_0) функция $q(x, y)$ имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция $f(x, y)$ — ограниченные частные производные второго порядка. Тогда

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu} c_n \frac{\partial \varphi_n(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \tag{7}$$

т. е. первая производная разложения функции $f(x, y)$ по собственным функциям оператора Шредингера в точке (x_0, y_0) сходится к значению $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$.

Если условия дифференцируемости, наложенные на $f(x, y)$ и $q(x, y)$, выполнены в некоторой замкнутой области d, целиком содержащейся внутри D, то равенство (7) имеет место равномерно в d.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ըստ $-\Delta + q(x, y)$ օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծությունների դիֆերենցման մասին

Դիցուք $q(x, y)$-ն անընդհատ իրական ֆունկցիա է, որոշված հարթության վերջավոր $\overline{D}$ միակապ տիրույթում: Γ-ով նշանակենք D տիրույթի եզրագիծը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\Delta u + \{\lambda - q(x, y)\} u = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0: \tag{2}$$

Քանի որ ըստ ենթադրության $q(x, y)$ ֆունկցիան սահմանափակ է D-ում, ապա առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ (1)—(2) խնդրի սպեկտրը բացասական չէ: Դիցուք $\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2 \cdots$-ով նշանակված են (1)—(2) խնդրի սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \cdots, \varphi_n(x, y) \cdots$-ով՝ համապատասխան օրթոնորմավորված սեփական ֆունկցիաները:

Դիցուք $f(x, y) \subset L_2(D)$: Նշանակենք

$$c_n = \iint_{(D)} f(x, y) \varphi_n(x, y)\, dxdy$$

և դիտարկենք հետևյալ շարքը

$$f(x, y) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x, y): \tag{3}$$

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է (3) շարքի դիֆերենցելիության հարցը: Նույն հարցը (1) հավասարման համար միաչափ տարածության մեջ հետազոտվել է մեր կողմից ([1]), իսկ եռաչափ տարածության մեջ՝ Բ. Մ. Լևիտանի կողմից ([2]): Բ. Մ. Լևիտանի կողմից նույն հարցը ուսումնասիրվել է նաև Լապլասի օպերատորի համար ցանկացած չափի տարածության մեջ (³)։ Հիմնական արդյունքը բոլոր վերևում նշված դեպքերում նույնն է և կայանում է նրանում, որ (3) շարքի ամեն մի ածանցում բարձրացնում է Մ. Ռիսի միջինների գումարման կարգը մեկ միավորով։ Բացի այդ, երբ տարածության չափը մեկ միավորով մեծացնում ենք, ապա համապատասխան ածանցյալների Մ. Ռիսի միջինների գումարման կարգը մեծանում է կեսով։ Այսպես, օրինակ, եթե միաչափ տարածության մեջ վերլուծության առաջին կարգի ածանցյալները գումարվում են Մ. Ռիսի առաջին կարգի միջիններով (¹), եռաչափ տարածության մեջ՝ երկրորդ կարգի միջիններով [³], ապա, ինչպես երևում է ներկա հոդվածի թեորեմ 2-ից, երկչափ տարածության մեջ գումարման միջինների կարգը հավասար է $^3/_2$-ի։

Դիցուք $S_s(x, y; \mu)$, $S^*_s(x, y; \mu)$ և D^α_{xy}-ը սահմանված են այնպես, ինչպես 202 էջում։

Թեորեմ 1. Եթե $f(x, y) \subset L_2(D)$ և $q(x, y)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի α-րդ կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ, ապա ամբողջովին D-ին պատկանող ցանկացած փակ տիրույթում հավասարաչափ տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$\lim_{\mu \to \infty} \left| D^\alpha_{xy} S_{\alpha+1/2}(x, y; \mu) - D^\alpha_{xy} S^*_{\alpha+1/2}(x, y; \mu) \right| = 0,$$

այսինքն՝ $f(x, y)$ ֆունկցիայի, ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության և ըստ Ֆուրյեի սովորական կրկնակի ինտեգրալների վերլուծության α-րդ կարգի ածանցյալների Մ. Ռիսի $\alpha + {}^1/_2$-րդ կարգի միջինների տարբերությունը ձգտում է 0-ի հավասարաչափ ամբողջովին D-ին պատկանող ցանկացած փակ տիրույթում։

Թեորեմ 2. Դիցուք $f(x, y) \subset L_2(D)$ և (x_0, y_0) կետի շրջակայքում ունի α-րդ կարգի անընդհատ մասնական ածանցյալներ, իսկ $q(x, y)$ ֆունկցիան (x_0, y_0) կետի շրջակայքում ունի α-րդ կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ։ Այդ դեպքում՝

$$\lim_{\mu \to \infty} D^\alpha_{xy} S_{\alpha+1/2}(x_0, y_0) = D^\alpha_{xy} f(x_0, y_0), \tag{4}$$

այսինքն՝ $f(x, y)$ ֆունկցիայի ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության α-րդ կարգի ածանցյալի Մ. Ռիսի $\alpha + {}^1/_2$-րդ կարգի միջինները (x_0, y_0) կետում ձգտում են $D^\alpha_{xy} f(x_0, y_0)$ արժեքին։

Թեորեմ 3. Դիցուք $f(x, y)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներ, ըստ որում $\Delta f - q(x, y) f \subset L_2(D)$ և բավարարում է (2) պայմանին։ Ենթադրենք D տիրույթի ներքին (x_0, y_0) կետի շրջակայքում $q(x, y)$ ֆունկցիան ունի առաջին կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ, իսկ $f(x, y)$-ը երկրորդ կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ։ Այդ դեպքում՝

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu}{}' c_n \frac{\partial \varphi_n(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\text{։} \tag{5}$$

Եթե $f(x, y)$ և $q(x, y)$ ֆունկցիաների վրա դրված դիֆերենցելիության պայմանները տեղի ունեն ամբողջովին D-ին պատկանող d փակ տիրույթում, ապա (4) և (5) հավասարությունները տեղի ունեն d-ում հավասարաչափ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Саргсян*, Известия АН СССР, серия матем., т. 21, 263 (1957). [2] *Б. М. Левитан*, Математический сборник (в печати). [3] *Б. М. Левитан*, Математический сборник, т. 39 (81): 1, 37 (1956). [4] *И. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. XXVI, 3 (1958).