ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVI 1958 4

МАТЕМАТИКА

Е. Г. Гольштейн

Оценки производных гармонических многочленов нескольких переменных

(Представлено С. Н. Мергеляном 19.XII.1957)

В настоящей заметке даются оценки производных гармонических многочленов для различных классов областей, подобные известным оценкам Маркова и Бернштейна. Далее формулируются вытекающие из этих оценок обратные теоремы теории наилучших приближений гармоническими многочленами.

Как и для многочленов в комплексной области, получение оценок для производных гармонических многочленов сводится к изучению роста многочленов вне исследуемого множества при условии ограниченности их на самом множестве.

Теорема 1. Пусть $P_n(q)$ — гармонический многочлен p переменных степени n.

Если $\max\limits_{q\in K_\alpha^{(p)}} |P_n(q)|\le M$, где $K_\alpha^{(p)}$ — область, определяемая неравенствами

$$\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\ x_1^2+\dots+x_{p-1}^2\le tg^2\alpha\cdot(1-x_p)^2,\ \ \frac{1}{2}\le x\le 1,$$

то для любого $\varepsilon>0$

$$\max_{x_1^2+\dots+x_{p-1}^2\,(1-x_p)^2<\rho^2} |P_n(q)|\le C(\varepsilon)\ln n\cdot[1+C_1\rho^{\mu}]^n\cdot M,\left(\rho\le\frac{1}{4}\right), \tag{1}$$

где $C(\varepsilon)$ и C_1 не зависят от n и ρ, а $\mu=\dfrac{1}{2\left(1-\dfrac{\alpha}{\pi}\right)}-\varepsilon$.

Прежде чем приводить доказательство теоремы 1, сформулируем и докажем вспомогательную лемму, представляющую также и самостоятельный интерес.

Лемма. Пусть $P_n(x, y)$ — гармонический многочлен 2-х переменных степени n.

Если $\max\limits_{(x,\ y)\in K_\alpha^{(2)}} |P_n(x, y)|\le M$, то для сопряженного гармоническо-

го многочлена $Q_n(x, y)$, удовлетворяющего условию $Q_n\left(0, \frac{3}{4}\right) = 0$, справедлива оценка

$$\max_{(x,\, y)\in K_\alpha^{(2)}} |Q_n(x, y)| \leqslant C_2 \ln n \cdot M, \tag{2}$$

где C_2 не зависит от n.

Доказательство леммы. Из соотношения $\frac{\partial Q_n}{\partial y} = \frac{\partial P_n}{\partial x}$ следует, что $Q_n(0,1) = \int\limits_{3/4}^{1} \frac{\partial P_n(0, y)}{\partial x} dy$. Следовательно,

$$\left| Q_n(0,1) \right| \leqslant \int\limits_{3/4}^{1} \left| \frac{\partial P_n}{\partial x} \right| dy = \int\limits_{3/4}^{s} \left| \frac{\partial P_n}{\partial x} \right| dy + \int\limits_{s}^{1} \left| \frac{\partial P_n}{\partial x} \right| dy. \tag{3}$$

Для оценки 1-го интеграла правой части (3) воспользуемся тем, что если $u(q)$ — гармоническая в шаре $x_1^2 + \ldots + x_p^2 \leqslant \rho^2$ функция, ограниченная в нем числом M, то

$$\left| \frac{\partial u(0, \ldots 0)}{\partial l} \right| \leqslant \frac{c^* M}{\rho}, \text{ где } c^* \text{ не зависит от } \rho. \tag{4}$$

Для оценки 2-го интеграла используем легко проверяемое неравенство

$$\max_{(x,\, y)\in K_\alpha^{(2)}} \left| \frac{\partial P_n}{\partial x} \right| \leqslant c_3 n^2 M,$$

где c_3 не зависит от n.

Имеем $|Q_n(0,1)| \leqslant M \left[\frac{c_4}{\sin \alpha} + \frac{c^*}{\sin \alpha} \ln \frac{1}{1 - s} + c_3 n^2 (1 - s) \right]$.

Полагая теперь $s = 1 - \frac{1}{n^3}$, получаем $Q_n(0,1) \leqslant c(\alpha) \ln n \cdot M$.

Аналогичным образом можно оценить $|Q_n|$ в любой граничной точке $K_\alpha^{(2)}$. Тем самым справедливость оценки (2) установлена.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые факты из теории гармонических многочленов в p-мерном пространстве ([1]). Если ввести сферические координаты $r, \theta_1, \ldots \theta_{p-2}, \varphi$, то произвольный гармонический многочлен $P_n(x_1, \ldots x_p) = \bar{P}(r, \theta_1, \ldots \theta_{p-2}, \varphi)$ можно записать в виде

$$P_n(r, \theta_1, \ldots \theta_{p-2}, \varphi) = \sum_{k=1}^{n} r^k Y_k^{(p)}(\theta_1, \ldots \theta_{p-2}, \varphi), \tag{5}$$

где $Y_n^{(p)}(\theta_1, \ldots \theta_{p-2}, \varphi)$ — сферическая функция степени n, соответствующая p-мерному пространству. Через $c_n^{(k)}(x)$ обозначим многочлены,

ортогональные на $[-1, 1]$ по весу $(1-x^2)^{k-\frac{1}{2}}$, $\left(c_n^{(k)}(1)=\frac{(n+p-1)!}{n!\,(p-1)!}\right)$, так называемые многочлены Гегенбауэра. Любая сферическая функция $Y_n^{(m)}(\theta_1, \ldots \theta_{m-2}, \varphi)$ может быть выражена через некоторые сферические функции
$Y_n^{(m-1)}(\theta_2, \ldots, \theta_{m-2}, \varphi)$ по формуле

$$Y_n^{(m)}=a_n c_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos\theta_1)+\sum_{l=1}^{n} c_{n-l}^{\frac{m-2}{2}+l}(\cos\theta_1)\sin^l\theta_1 Y_l^{m-1}(\theta_2, \ldots \theta_{p-2}, \varphi),\quad m\geqslant 3. \tag{6}$$

Заметим, что $c_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ — многочлены Лежандра,

$c_n^{(1)}(x)$ — многочлены Чебышева 2-го рода.

Доказательство теоремы 1. Установим в начале справедливость (1) для $p=2$. Положим $R_n(z)=P_n(x_1, x_2)+iQ_n(x_1, x_2)$, где $Q_n(x_1, x_2)$ — сопряженный с $P_n(x_1, x_2)$ многочлен, а $z=x_1+ix_2$. Из леммы вытекает, что $\max\limits_{z\in K_\alpha^{(2)}}|R_n(z)|\leqslant c_5\ln n\cdot M$.

Воспользовавшись известной оценкой роста многочлена комплексного переменного в окрестности угловой точки [2], имеем

$$\max_{|z-1|<\rho}|P_n(x_1, x_2)|\leqslant\max_{|z-1|<\rho}|R_n(z)|\leqslant c_6\ln n\left[1+c_7\rho^{\frac{1}{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)}}\right]^n\cdot M.$$

Перейдем к случаю $p=4$.

Введем сферические координаты $r, \theta_1, \theta_2, \varphi$.

Рассмотрим

$$\widehat{P}_n(r, \theta_1)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{P}_n(r, \theta_1, \theta_2, \varphi)\sin\theta_2 d\theta_2 d\varphi.$$

Из (5), (6) и ортогональности на единичной сфере $Y_l^{(3)}$ и $Y_0^{(3)}(l\geqslant 1)$ следует, что

$$\widehat{P}_n(r, \theta_1)=\sum_{k=0}^{n}a_k r^k c_k^{(1)}(\cos\theta_1)=\sum_{k=1}^{n}a_k r^k\cdot\frac{\sin(k+1)\theta_1}{\sin\theta_1}. \tag{7}$$

Из (6) вытекает, что на оси x_4 $(\theta_1=0)$ многочлены P_n и $\widehat{P}_n$ совпадают.

Кроме того, из определения $\widehat{P}_n(r, \theta_1)$ следует, что в $K_\alpha'^{(4)}$

$$\left|\widehat{P}_n\right|\leqslant M. \tag{8}$$

Следовательно, если мы хотим оценить рост $P_n(x_1, x_2, x_3, x_4)$ вдоль оси x_4, достаточно сделать эту оценку для $\widehat{P}_n(r, \theta_1)$. Если считать r, θ_1 полярными координатами в плоскости xoy, то из (7) и (8) следует, что

$N_n(r, \theta_1)=r\widehat{P}_n(r, \theta_1)\sin\theta_1$ — гармонический многочлен переменных

x, y степени $n+1$, причем в $\widehat{K}_\alpha\left(|y| \leqslant \operatorname{tg}\alpha(1-x),\ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$

$$|N_n(r, \theta_1)| \leqslant c_8 \sin\theta_1 M. \tag{9}$$

Оценим, пользуясь (9), $\left|\frac{\partial N_n}{\partial y}\right|$ в $\overline{K}_{\alpha-\varepsilon}\left(|y| \leqslant \operatorname{tg}(\alpha-\varepsilon)(1-x),\ \frac{1}{2}+\varepsilon \leqslant x \leqslant 1\right)$ при любом $\varepsilon > 0$.

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c(\varepsilon)$, что расстояние любой точки $\overline{K}_{\alpha-\varepsilon}$ с координатами (r, θ_1) до границы $\widehat{K}_\alpha$ не меньше $c(\varepsilon)\sin\theta_1$. Следовательно, используя (4) в $\overline{K}_{\alpha-\varepsilon}$ имеем

$$\left|\frac{\partial N_n}{\partial y}\right| \leqslant \frac{c_8 \sin\theta_1 M}{c(\varepsilon)\sin\theta_1} = c_9 M. \tag{10}$$

Но $\frac{\partial N_n}{\partial y}$ — гармонический многочлен 2-х переменных степени не выше, чем n.

Поэтому для него оценка (1) справедлива. Так как $N_n(r, 0) = 0$,

$$\frac{\partial N_n(r, 0)}{\partial y} = \lim_{\theta \to 0} \frac{N_n(r, \theta)}{r \sin\theta}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{P}_n(r, 0) = \lim_{\theta \to 0} \frac{N_n(r, \theta)}{r\sin\theta} = \frac{\partial N(r, 0)}{\partial y}.$$

Отсюда $\max\limits_{|1-r| < \rho} \left|\widehat{P}_n(r, 0)\right| \leqslant c_1(\varepsilon)\, ln\, n \cdot [1 + c_4\rho^2]^n\ M.$

Аналогичным образом можно оценить рост $P_n(x_1, x_2, x_3, x_4)$ вдоль любой прямой, параллельной оси x_4 и отстоящей от нее на расстоянии $\leqslant \rho$. Для этого достаточно заметить, что область, определяемая неравенствами:

$$(x_1-\rho_1)^2 + (x_2-\rho_2)^2 + (x_3-\rho_3)^2 \leqslant \operatorname{tg}^2\alpha\left(1 - \frac{\rho_0}{\operatorname{tg}\alpha} - x_4\right)^2,$$

$$\frac{1}{2} \leqslant x_4 \leqslant 1 - \frac{\rho_0}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{где } \rho_0^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2, \quad (\rho_0 \leqslant \rho)$$

содержится в $K_\alpha^{(4)}$. Тем самым теорема 1 для $p = 4$ доказана.

Рассмотрим случай произвольного четномерного пространства: $p = 2k$.

Покажем, что, если теорема 1 для $p = 2(k-1)$ верна, то она верна и для $p = 2k$.

С помощью проведенных ранее рассуждений оценка роста многочлена $P_n(x_1, \ldots x_{2k})$ вдоль оси x_{2k} сводится к аналогичной оценке для многочлена вида $P_n(r, \theta_1) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i r^i c_i^{k-1}(\cos\theta_1)$.

Из формулы (6) следует, что

$$r^i C_{i-1}^{k-1}(\cos\theta_1)\sin\theta_1\cos\theta_2,\quad (k\geqslant 3)$$

— гармонический многочлен $2(k-1)$ переменных степени i.

Значит $N_n(r,\theta_1,\theta_2)=r\hat{P}(r,\theta_1)\sin\theta_1\cos\theta_2$ — гармонический многочлен в $2(k-1)$ — мерном пространстве степени $n+1$.

Если $r,\theta_1,\ldots\theta_{2k-4},\varphi$ считать сферическими координатами в $2(k-1)$ — мерном пространстве, то $|N_n(r,\theta_1,\theta_2)|$ в $k_2^{2(k-1)}$ удовлетворяет неравенству

$$|N_n(r,\theta_1,\theta_2)|\leqslant C_9\sin\theta_1 M. \tag{11}$$

Если ввести в рассмотрение $\dfrac{\partial N_n}{\partial x_{2k-3}}$, учесть (11) и справедливость (1) для $p=2(k-1)$, то рассуждения, полностью совпадающие с аналогичными рассуждениями для $p=4$, позволят установить (1) для $p=2k$.

Остается рассмотреть случай $p=2k-1$. Легко заметить, что из справедливости оценки (1) для $p=m$ следует, что она имеет место и для $p=m-1$. Теорема 1 полностью доказана.

Введем 2 определения.

1. Будем говорить, что область p-мерного пространства D принадлежит классу $H_p(\alpha,\nu)$, если до любой граничной точки q области D можно так дотронуться вершиной p-мерного конуса раствора 2α, что часть этого конуса, попадающая в ν-окрестность точки q, содержится в D.

2. Пусть D — Жорданова область p-мерного пространства с гладкой границей.

Через $\vec{e}(q)$ обозначим единичный вектор внешней нормали границы D в точке q.

Положим $\omega_D(\delta)=\sup|\vec{e}(q_1)-\vec{e}(q_2)|$ по всем точкам $q_1,q_2\in\bar{D}-D$ и отстоящим друг от друга на расстоянии $\leqslant\delta$.

Будем говорить, что $D\in H_p(\varphi)$, если $\omega_D(\delta)\leqslant\varphi(\delta)$, $(\delta\leqslant\delta_0)$. Из теоремы 1 с помощью несложных рассуждений можно извлечь следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть $D\in H_p(\alpha,\nu)$. *Если* $\max\limits_{q\in D}|P_n(q)|\leqslant M$, где $P_n(q)$ — *гармонический многочлен p-переменных степени n, то для любого* $\varepsilon>0$

$$\max_{q\in D}\left|\frac{\partial^k P_n(q)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_p^{k_p}}\right|\leqslant c_1(k,\varepsilon)\,n^{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)k+\varepsilon}M,\quad (k=k_1+\ldots+k_p) \tag{12}$$

где $c_1(k,\varepsilon)$ *не зависит от* n.

Теорема 3. Пусть D — Жорданова область p-мерного пространства с гладкой границей. Если $\max\limits_{q\in D}|P_n(q)|\leqslant M$, *где P_n (q) — гармонический многочлен p-переменных степени n, то для любого $\varepsilon > 0$*

$$\max_{q \in D} \left| \frac{\partial^k P_n(q)}{\partial x^{k_1}, \ldots \partial x_p^{k_p}} \right| \leqslant c_2(n_k, \varepsilon)\, n^{k+\varepsilon} M, \quad (k_1 + \ldots + k_p = k), \tag{13}$$

где c_2 (k, ε) не зависит от n.

Теорема 3 дает оценку производных гармонического многочлена, ограниченного в произвольной области с гладкой границей. Если потребовать, чтобы граница D кроме условия гладкости удовлетворяла еще некоторым дополнительным условиям, то рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве теоремы 1, позволяют улучшить оценку (13). Именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 4. Пусть $\max\limits_{q \in D} |P_n(q)| \leqslant M$, где $P_n(q)$ — гармонический многочлен p-переменных степени n, а $D \in H_p(\varphi)$.

а) *Если функция $\varphi(\delta)$ такова, что*

$$\int_0^{h_0} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx < \infty,$$

то

$$\max_{q \in D} \left| \frac{\partial^k P_n(q)}{\partial x^{k_2}, \ldots \partial x_p^{k_p}} \right| \leqslant c_{10} n^k \ln \cdot n M. \quad (k = k_1 + \ldots + k_p) \tag{14}$$

где c_{10} не зависит от n.

б) *Если $\varphi(\delta) = c_{11}\delta$, то*

$$\max_{q \in D} \left| \frac{\partial^k P(q)}{\partial x^{k_1}, \ldots \partial x_p^{k_p}} \right| \leqslant c_{12} n^k M, \tag{15}$$

где c_{12} не зависит от n.

Замечание. Оценка (15) для $p = 2$, 3 методом, отличным от предлагаемого в настоящей заметке, была установлена А. Л. Шагиняном [8].

В работе [3] была получена оценка для производной гармонического многочлена, ограниченного в шаре $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 1$, вдоль r.

Аналогичные оценки имеют место и в p-мерном случае. Приводимые ниже утверждения уточняют эти оценки для $p = 2k$. Пусть $P_n(q)$ — гармонический многочлен $2k$ переменных степени n,

$$\max_{x_1^2 + \ldots x_{2k}^2 = 1} |P_n(q)| = M.$$

Можно доказать, что

$$\max_{x_1^2 + \ldots x_{2k}^2 = 1} \left| \frac{\partial P_n}{\partial r} \right| \leqslant \frac{(2k-2)!!}{(2k-3)!!}\, n \left[1 + 0\left(\frac{1}{n}\right) \right] \quad (k \geqslant 2). \tag{16}$$

С другой стороны, если через $T_n^{(2k)}(r, \theta_1)$ обозначить гармонический многочлен $2k$-переменных, совпадающий на единичной сфере с $\cos n\theta_1$, то можно показать, что

$$\frac{\partial T_n^{(2k)}(1,0)}{\partial r} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-3)!!} n - (2k-3) \tag{17}$$

$$\text{при } n \geqslant 2k-3 \quad k \geqslant 2.$$

Для $p = 4$ оценку (16) можно уточнить:

$$\max_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2} \left| \frac{\partial P_e}{\partial r} \right| \leqslant (2n-1)M. \tag{18}$$

Для $p = 4$ можно также дать точную оценку роста гармонического многочлена вне шара:

$$\max_{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=r^2} |P_n(q)| \leqslant \frac{1}{2} r^{n-2} [(r^2-1)(n+1)+2]. \tag{19}$$

Заметим, что для $T_n^{(4)}(r, \theta_1)$ неравенства (18) и (19) переходят в равенства.

Из полученных оценок (12), (13), (14) известным приемом можно извлечь несколько результатов теории наилучших приближений гармоническими многочленами. Сформулируем эти результаты.

Т е о р е м а 5. *Пусть наилучшие приближения $E_n(f, \bar{D}-D)$ функция $f(q)$, определенной на границе D, удовлетворяют условию*

$$E_n(f, \bar{D}-D) \leqslant \frac{c_0}{n^{k+\lambda}} \quad (k \text{ — целое, } 0<\lambda<1)$$

а) *Если $D \in H_p(\alpha, \nu)$, то гармоническая функция $U(q)$, совпадающая на границе D с $f(q)$, обладает в $\bar{D}$ всевозможными частными производными до порядка $r = E\left[\frac{k+\lambda}{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)} - \varepsilon\right]$ включительно, причем все производные r-го порядка удовлетворяют условию Липшица порядка $\left(\frac{k+\lambda}{2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)} - \varepsilon - r\right)$. ($\varepsilon$ — произвольное число >0).*

б) *Если граница D гладкая, то $u(q)$ обладает в $\bar{D}$ производными до порядка k включительно, причем все производные k-го порядка удовлетворяют условию Липшица порядка $\lambda-\varepsilon$, где ε производное число >0.*

в) *Если $D \in H_p(\varphi)\left(\int\limits_0^{\delta_0} \frac{\omega(x)\,dx}{x} < \infty\right)$, то $u(q)$ обладает в $\bar{D}$ производными до порядка k включительно, причем модули непрерыв-*

ности $k^{\text{ых}}$ *производных мажорируются функцией* $c\cdot\delta^{\alpha}\ln\frac{1}{\delta}$, *где* c *не зависит от* δ.

В заключение приношу глубокую благодарность С. Н. Мергеляну, под руководством которого получены изложенные в настоящей работе результаты.

Է. Գ. ԳՈԼՇՏԵՅՆ

Մի քանի փոփոխականների հարմոնիկ բազմանդամների ածանցյալների գնահատականները

Սույն հոդվածում տրվում են հարմոնիկ բազմանդամների ածանցյալների գնահատականները տիրույթների տարբեր դասերի համար՝ նման Մարկովի և Բեռնշտեյնի հայտնի գնահատականներին: Այնուհետև ձևակերպվում են այդ գնահատականներից բխող հարմոնիկ բազմանդամներով լավագույն մոտավորությունների տեսության հակադարձ թեորեմները:

Ինչպես կոմպլեքս տիրույթում բազմանդամների համար, այնպես էլ հարմոնիկ բազմանդամների ածանցյալների գնահատականների ստացումը բերվում է այդ բազմանդամների աճի ուսումնասիրությանը քննարկվող բազմությունից դուրս, նրանց սահմանափակության պայմանների առկայությամբ այդ բազմության վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Erdelyi, Magnus*, Higher transcendental function, т. 2, New York. 1953, [2] *С. Н. Мергелян*, Некоторые вопросы конструктивной теории функций. Труды мат. инст. им. Стеклова, т. XXXVII, (1951). [3] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, XC, № 2 (1953).