ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXVI 1958 3

МЕХАНИКА

Л. Г. Седракян

Две задачи статистической теории прочности

(Представлено А. Г. Назаровым 3. IX. 1957)

Ряд вопросов, связанных с инженерными расчетами, требует решения следующих задач теории вероятностей.

1. Имеется неограниченное число звеньев, при этом их прочность величина переменная. Функция распределения прочностей отдельных звеньев задана. Последовательным соединением звеньев составляются цепи. Необходимо определить функцию распределения прочности цепи в зависимости от числа звеньев в ней.

2. Имеется неограниченное число проволок одинаковой длины и сечения. Прочность проволок величина переменная, функция её распределения задана. Из проволок свиваются канаты. Необходимо определить вероятность составления (встречи) таких разновидностей канатов, в которых при заданных значениях внешней нагрузки из n исходного числа проволок c разрушается, а остальные уцелеют.

Особенность этих двух задач заключается в том, что к первой из них сводятся некоторые задачи статистической теории хрупкой прочности [1, 2] и задача обоснования расчетных коэффициентов прочности статически определимых систем [3]. Ко второй из них сводятся задачи обоснования расчетных коэффициентов прочности статически неопределимых систем [3], задача усталостной прочности [4] и задачи, связанные с установлением условий хрупкого разрушения вообще [1, 5].

Р е ш е н и е п е р в о й з а д а ч и. Цепи состоят из n звеньев. Возможные значения прочности звеньев обозначим через R_i, возрастающие в порядке возрастания i. Пусть общее число возможных значений прочности звеньев равняется s. Вероятность встречи звена с прочностью R_i независимо от прочности взятых до и после него звеньев равна p_i. При этом ясно, что

$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1 \tag{1}$$

Необходимо определить вероятность того, что прочность любой, наугад выбранной цепи, будет иметь некоторое определенное, наперед заданное значение, например R_k.

При испытании на разрыв каждая из цепей будет разрушаться в наименее прочном своем звене и прочность цепи будет равняться прочности этого звена; прочность цепи будет равняться R_k, если прочность хотя бы одного из звеньев будет равняться R_k, а прочность остальных будет выше.

Разновидности цепей, в которых число звеньев с прочностью R_k одинаковое, назовем одного типа. При этом цепи типа j характерны тем, что в них из n звеньев j имеют прочность, равную R_k, а остальные $n-j$ звенья имеют прочность больше R_k. Ясно, что число возможных типов цепей с прочностью R_k равно n.

Вычислим вероятность $\overset{n}{\underset{j}{P}}{}_{(k)}$ встречи цепи типа j.

Вероятность составления каждой из разновидностей рассматриваемого типа цепи по правилу умножения для независимых событий равна произведению n множителей, из которых j равны p_k (вероятности того, что звенья имеют прочность R_k), а остальные $n-j$ равны $\sum\limits_{i=k+1}^{s} p_{(i)}$ (вероятности того, что звенья имеют прочность больше R_k).

Число разновидностей цепи этого типа равно числу разных способов выбора j элементов из n, т. е. равно C_n^j.

По правилу сложения вероятностей независимых событий,

$$\overset{n}{\underset{j}{P}}{}_{(k)} = C_n^j\ (p_{(k)})^j \left(\sum_{i=k+1}^{s} P_i \right)^{n-j}. \tag{2}$$

По тому же правилу сложения искомая вероятность встречи цепи прочностью R_k равна

$$\overset{n}{P}_k = \sum_{j=1}^{n} \overset{n}{\underset{j}{P}}{}_{(k)}. \tag{3}$$

Подставляя в (3) значение $\overset{n}{\underset{j}{P}}{}_{(k)}$ из (2), после преобразования получим:

$$\overset{n}{P}_{(k)} = \left(\sum_{i=k}^{s} p_i \right)^n - \left(\sum_{i=k+1}^{s} p_i \right)^n. \tag{4}$$

Формулу (4) можно получить из простых соображений без C_n^i. Для того чтобы прочность цепи была R_k, необходимо и достаточно, чтобы прочность звена минимальной прочности была $> R_{k-1}$ и $< R_{k+1}$. Обозначая эту прочность $x_{\min}$, находим:

$$P(x_{\min} = R_k) = P(x_{\min} > R_{k-1}) - P(x_{\min} > R_k).$$

Так как

$$P(x_{\min} > R_{k-1}) = \left(\sum_{i>k} p_i\right)^n = \left(\sum_{i=k}^{s} p_i\right)^n;$$

$$P(x_{\min} > R_k) = \left(\sum_{i>k+1} p_i\right)^n = \left(\sum_{i=k+1}^{s} p_i\right)^n$$

отсюда сразу получим (4).

Функция распределения прочности цепи, когда прочность звеньев меняется непрерывно, получается как частный случай общего решения второй задачи.

Решение второй задачи. Канаты свиваются из n проволок. Прочность проволок принимает всевозможные значения, лежащие между $R_{\min}$ и $R_{\max}$. Задана интегральная функция распределения прочности проволок — $W_{(R)}$. Необходимо определить вероятность встречи таких разновидностей канатов, в которых под нагрузкой $N=nR$ из n исходного числа проволок c разрушатся (одновременно или последовательно, по мере выхода из строя отдельных проволок или их групп), а остальные $n-c$ не разрушаются. Ясно, что если $c<n$, то канат в целом уцелеет и разрушится, когда $c=n$.

Приложенная к канату сила N распределяется между уцелевшими проволоками каната равномерно. При этом предполагается, что модуль упругости всех проволок одинаков и проволоки разрушаются хрупко.

Среднее растягивающее усилие в каждой проволоке равно

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{N}{n} = R. \tag{5}$$

Проволоки, прочность которых равна или больше R, назовем первого сорта, а проволоки, прочность которых меньше R — второго сорта.

Разновидности канатов, в которых число проволок первого сорта одинаково, назовем одного типа. Канаты типа k ($k=0;\ 1;\ 2;\cdots;n$) характерны тем, что из их n проволок k второго сорта, а остальные первого сорта. Число типов канатов будет $n+1$.

Заметим, что процесс составления канатов сводится к свиванию одной за другой n штук проволок. При этом взятая в данный раз проволока, независимо от прочности предыдущих и последующих проволок, с вероятностью $W_{(R)}$ будет второго сорта и с вероятностью $(1-W_{(R)})$ первого сорта.

Вероятность встречи канатов типа k, как и в задаче цепи, равна

$$C_n^k \left(W_{(R)} \right)^k \left(1 - W_{(R)} \right)^{n-k}. \tag{6}$$

Ясно, что вероятность встречи канатов, в которых под средним усилием R ни одна проволока не разрушается $\left(\overset{n}{\underset{o}{W}}_{(R)} \right)$, равна вероятности встречи канатов нулевого типа. На основе (6)

$$\overset{n}{\underset{o}{W}}_{(R)} = \left(1 - W_{(R)} \right)^n. \tag{7}$$

Рассмотрим случай, когда $c \neq 0$.

В канатах типа k под средним усилием R, число разорванных проволок не меньше k. Следовательно, искомого свойства канаты могут встречаться среди разновидностей канатов типов $k \leqslant c$.

В канатах типа k ($k \leqslant c \neq 0$), при приложении нагрузки nR выйдут из строя k проволок и вся нагрузка передастся $n-k$ проволокам. Теперь как бы имеется новый канат, состоящий из $n-k$ проволок, на которые действует нагрузка nR. При этом имеется условие, что все $n-k$ проволоки нового каната первого сорта. Если среди $n-k$ проволок нового каната окажутся такие, прочность которых меньше $nR/(n-k)$, то они тоже выйдут из строя. По условиям задачи нас интересуют разновидности канатов, состоящих из $n-k$ проволок первого сорта, в которых число разорванных проволок i не больше чем $c-k$, в противном случае общее число разорванных проволок в канатах типа k будет больше c. После выхода из строя этих $i \leqslant c-k$ проволок внешняя нагрузка передастся на еще меньшее число $(n-k-i)$ проволок. Последние имеют прочность не меньше $nR/(n-k)$. Усилия на уцелевшие проволоки снова возрастут, что создаст вероятность разрушения новых проволок. Процесс постепенного выхода из строя проволок приостановится тогда, когда усилие в уцелевших проволоках будет меньше их прочности. В разновидностях канатов искомого нами свойства число таких проволок равно $n-c$ и их прочность $R' \geqslant \dfrac{nR}{(n-c)}$.

Вероятность встречи разновидностей канатов, состоящих из $n-k$ проволок первого сорта, в которых под нагрузкой nR сразу или последовательно разрушаются $c-k$ проволок, а остальные $n-c$ остаются целыми, обозначим через

$$\overset{n-k}{\underset{c-k}{W}}\left(\frac{nR/(n-k)}{R} \right). \tag{8}$$

Тогда ясно, что вероятность встречи искомого нами свойства канатов в канатах типа k будет равняться

$$C_n^k \left(W_{(R)} \right)^k \left(1 - W_{(R)} \right)^{n-k} \overset{n-k}{\underset{c-k}{W}}\left(\frac{nR/(n-k)}{R} \right) \tag{9}$$

Вероятность же встречи искомого свойства канатов во всех типах и разновидностях канатов равна

$$\overset{n}{\underset{c}{W}}{}_{(R)} = \sum_{k=1}^{c} C_n^k \left(W_{(R)} \right)^k \left(1 - W_{(R)}\right)^{n-k} \overset{n-k}{\underset{c-k}{W}}{}_{\left(\frac{nR(n-k)}{R}\right)}; \quad (1 < c < n), \tag{10}$$

где

$$\overset{n-k}{\underset{c-k}{W}}{}_{\left(\frac{nR/(n-k)}{R}\right)} = \sum_{i=1}^{c-k} C_{n-k}^i \left(W_{\left(\frac{nR/(n-k)}{R}\right)} \right)^i \times$$

$$\times \left(1 - W_{\left(\frac{nR/(n-k)}{R}\right)} \right)^{n-k-i} \overset{n-k-i}{\underset{c-k-i}{W}}{}_{\left(\frac{nR(n-k-i)}{nR(n-k)}\right)}; \qquad (k \neq c). \tag{11}$$

При $k=c$ и вообще

$$\overset{n-c}{\underset{0}{W}}{}_{\left(\frac{aR}{bR}\right)} = \left(1 - W_{\left(\frac{aR}{bR}\right)} \right)^{n-c}. \tag{12}$$

Индекс над знаком вероятности (W) указывает число проволок каната; индекс под знаком вероятности указывает число разорванных проволок; числитель дроби индекса сбоку указывает величину среднего усилия, приходящегося на каждую проволоку каната, наличие знаменателя дроби индекса указывает на условность вероятности, а численное значение знаменателя показывает, чему равен минимум значения прочности проволок.

В полиноме (10) неопределенными остаются только условные вероятности разрушения одиночных проволок: $W_{\left(\frac{aR}{bR}\right)}$; a и b целые положительные числа. По определению $W_{\left(\frac{aR}{bR}\right)}$ есть вероятность разрушения проволок от усилия aR при условии, что проволоки прочностью меньшей или равной bR отсутствуют. Легко заметить, что

$$W_{\left(\frac{aR}{aR}\right)} = \frac{W_{(aR)} - W_{(bR)}}{1 - W_{(bR)}}. \tag{13}$$

При этом, когда $aR \geqslant R_{max}$, то $W_{(aR)} = 1$, следовательно и $W_{\left(\frac{aR}{bR}\right)} = 1$. В случае, когда $a \leqslant b$, $W_{\left(\frac{aR}{bR}\right)} = 0$.

Вероятность полного разрушения канатов получится из (10) подстановкой $c=n$. При этом надо учесть, что когда число уцелевщих проволок равно нулю, вероятность разрушения при любых внешних воздействиях равна единице.

Теперь легко получить и функцию распределения вероятностей прочности цепи, когда прочности звеньев меняются непрерывно от R_{min} до R_{max} по функции распределения $W_{(R)}$.

Если на цепь действует сила R, то кроме цепей нулевого типа все остальные разрушаются, и вероятность разрушения цепи от усилия R будет:

$$\overset{n}{W}_{(R)} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(W_{(R)} \right)^k \left(1 - W_{(R)}\right)^{n-k} = 1 - \left(1 - W_{(R)}\right)^n . \qquad (14)$$

При заданной функции распределения вероятностей прочности звеньев или проволок легко определить, использовав (4), (10), (14), средние значения, моды, среднеквадратичные отклонения и другие показатели сопротивляемости цепи и канатов.

Институт строительных материалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

Լ. Գ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

Ամրության ստատիստիկական տեսության երկու խնդիր

Ինժեներական հաշվարկումների ժամանակ ստատիկորեն որոշակի ու անորոշ սխեմա ունեցող կոնստրուկցիաների ամրության հաշվային գործակիցների որոշման խնդիրները, ինչպես նաև դյուրաբեկ նյութերի ամրության ու նյութերի հոգնածային ամրության մի շարք խնդիրների լուծումը, բերվում են ոչ հաստատուն ամրության, օղակներից ու լարերից պատրաստված շղթայի ու ճոպանի ամրության խնդիրների լուծմանը։

Հոդվածում տրված է այդ երկու խնդիրների լուծումը։ Երբ օղակի ամրությունը ընդունում է միայն որոշակի (R_i) արժեքներ՝ P_i հավանականությամբ, ապա հավանականությունը, որ այդպիսի n օղակներից պատրաստված շղթայի ամրությունը կլինի R_k, որոշվում է (4) արտահայտությամբ։ Այն դեպքում, երբ օղակի ամրությունը փոփոխվում է անընդհատ՝ $W_{(R)}$—ինտեգրալ բաշխման օրենքով, ապա այդպիսի n օղակներից պատրաստված շղթայի ամրության բաշխման օրինաչափությունը կարտահայտվի (14) բանաձևով։

Երբ n լարերից պատրաստված ճոպանի վրա ազդում է nR արտաքին ուժը, ապա հավանականությունը, որ այդ ուժի տակ ճոպանի c լարերը՝ միանգամից կամ աստիճանաբար կկտրվեն, իսկ մնացած $n-c$ լարերը առանց կտրվելու կդիմադրեն արտաքին ուժին, որոշվում է (10) արտահայտությամբ։ Այստեղ $W_{(R)}$—հավանականությունն է, որով լարը R-ուժի տակ կկտրվի։ Տեղադրելով (10)-ում $c=0$ և $c=n$ համապատասխանաբար կստացվեն՝ հավանականությունը, որ ճոպանում արտաքին ուժի տակ չի քայքայվի ոչ մի լար, և հավանականությունը, որ ճոպանը ամբողջությամբ կկտրվի։

Երբ տրված է օղակի կամ լարի ամրության բաշխման ֆունկցիան, ապա օգտագործելով (4), (10), (14) արտահայտությունները, կարելի է որոշել շղթայի և ճոպանի ամրության միջին արժեքը, ամենից հաճախ պատահող արժեքը և ամրության միջին քառակուսային շեղումները՝ նրա միջին արժեքից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Вейбул*, Proc. Roy. Swedish Inst. Res., № 151, 1939. [2] *Т. А. Конторова* и *Я. И. Френкель*, ЖТФ, XI, вып. 3, (1941) [3] *А. Р. Ржаницын*, Материалы к теории расчета конструкций по предельному состоянию, вып. II, 18, 1949. [4] *Н. Н. Афанасьев*, ЖТФ. X, вып. 19 (1940). [5] *Т. А. Конторова*, ЖТФ, XIII, вып. 6, (1943).