

И. С. Саргсян

О дифференцировании спектральной функции оператора
 $-\Delta + q(x, y)$

(Представлено М. М. Джрбашяном 3. 1. 1958)

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$-\Delta u + q(x, y)u = \lambda u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где $q(x, y)$ — действительная непрерывная функция, определенная в некоторой конечной односвязной области $\bar{D}$ двумерного пространства Эвклида E_2 , а Γ — граница области D .

Так как функция $q(x, y)$ по предположению непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то она ограничена и поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно предполагать, что спектр задачи (1) — (2) неотрицателен. В самом деле, при таком предположении относительно функции $q(x, y)$, как известно, отрицательный спектр задачи (1) — (2) ограничен снизу и поэтому можно подобрать число η так, чтобы спектр задачи

$$-\Delta u + q(x, y)u = (\lambda + \eta)u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$$

оказался неотрицательным.

Обозначим через $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2, \dots$ собственные значения задачи (1) — (2), а через $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$ соответствующие ортонормированные собственные функции задачи (1) — (2).

Далее, обозначим через $\theta(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию задачи (1) — (2), т. е. положим

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v), \quad \mu > 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = 0, \quad \mu = 0,$$

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = -\theta(x, y, u, v; -\mu), \quad \mu < 0.$$

В настоящей заметке изучается асимптотическое поведение производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ при больших μ . Аналогичный вопрос для одномерного случая уравнения (1) в бесконечном интервале исследован нами ^(1,2), в трехмерном случае и для оператора Лапласа в пространствах любого измерения изучен Б. М. Левитаном ^(3,4). Асимптотическое поведение самой спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ для уравнения (1) в пространствах любого измерения исследован Б. М. Левитаном ^(5,6).

Асимптотическое поведение производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ нужно для исследования вопросов суммирования или сходимости дифференцированных разложений по собственным функциям задачи (1)—(2), т. е. оператора Шредингера, заданного в конечной части двумерного пространства.

Сформулируем основные результаты, которые получены с помощью метода и тауберовых теорем Б. М. Левитана и одной специальной тауберовой теоремы В. А. Марченко ⁽⁷⁾.

Обозначим через $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ спектральную функцию уравнения (1) для всего пространства E при $q(x, y) \equiv 0$. Она определяется формулой (см., например, ⁽⁸⁾, стр. 296):

$$\theta^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{1}{2\pi} \mu \frac{J_1(\mu r)}{r},$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p , а r — расстояние точек (x, y) и (u, v) .

Лемма 1. Обозначим через η произвольное положительное число и через D_η — множество точек области D , расстояние которых до границы Γ области D не меньше, чем η . Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченные частные производные первого порядка, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ существует константа $C = C_\eta$ такая, что при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$\bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x \partial u} \right\}_{\substack{u=x \\ v=y}} = \sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right]^2 < C_\eta \mu^3.$$

Из леммы 1 и неравенства Коши-Буняковского следует

Лемма 2. Пусть η, D_η, C_η и $q(x, y)$ удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left\{ \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x \partial u} \right\} &= \sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} \left| \frac{\partial \varphi_n(u, y)}{\partial x} \right| \times \\ &\times \left| \frac{\partial \varphi_n(u, v)}{\partial u} \right| < C_\eta \mu^2. \end{aligned}$$

В работе ⁽⁶⁾ Б. М. Левитаном доказана следующая

Лемма 3. Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в лемме 1. Если функция $q(x, y)$ непрерывна в области D , то при $(x, y) \in D_\eta$ и при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$\sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} \varphi_n^2(x, y) < C_\eta \mu.$$

Из лемм 1 и 3 и неравенства Коши-Буняковского следует

Лемма 4. При тех же предположениях, что и в лемме 1 и $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \bigvee_{\mu}^{\mu+1} \left| \frac{\partial^2 \theta(x, y, u, v; \mu)}{\partial x} \right| &= \sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} \left| \frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} \right| \times \\ &\times |\varphi_n(u, v)| < C_\eta \mu^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Для старших производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$ имеют место асимптотические оценки, аналогичные оценкам, установленным в предыдущих леммах. А именно, справедлива следующая

Лемма 5. Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в лемме 1. Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha + \beta - 1$ (α и β любые целые положительные числа) включительно, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\begin{aligned} \bigvee_{\mu}^{\mu+1} |D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta(x, y, u, v; \mu)| &= \\ &= \sum_{\mu < \mu_n < \mu+1} |D_{xy}^\alpha \varphi_n(x, y)| \cdot |D_{uv}^\beta \varphi_n(u, v)| < C_\eta \mu^{\alpha+\beta+1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где через D_{xy}^α обозначен следующий оператор дифференцирования:

$$D_{xy}^\alpha \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}, \quad (\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha).$$

Исходя из предварительной оценки (3) нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в лемме 1. Если функция $q(x, y)$ в области D непрерывна, то при $(x, y), (u, v) \in D_\eta$ и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y, u, v; \mu) - \frac{\partial}{\partial x} \theta^*(x, y, u, v; \mu) \right| < C_\eta \mu^2. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\theta_s(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2}\right)^s \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v). \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \theta_s^*(x, y, u, v; \mu) &= \int_0^\mu \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right)^s d\theta^*(x, y, u, v; v) = \\ &= \frac{2^{s-1}}{\pi} \mu^{1-s} \frac{J_{1+s}(\mu r)}{r^{s+1}}. \end{aligned} \quad (7)$$

(По поводу равенства (7) см. ⁽⁸⁾, стр. 296).

В силу леммы 5 справедлива следующая

Теорема 2. Пусть η , D_η и C_η имеют то же значение, что и в лемме 1. Если функция $q(x, y)$ в области D имеет ограниченные частные производные до порядка $\alpha + \beta - 1$ включительно, то при $(x, y), (u, v) \in G_\eta$ и при $\mu \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула ($s \geq 0$)

$$|D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta_s(x, y, u, v; \mu) - D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta_s^*(x, y, u, v; \mu)| < C_\eta \mu^{\alpha+\beta+1-s}.$$

При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $s = 0$ из теоремы 2 следует теорема 1.

Предположим теперь, что область D бесконечна. Пусть $D = E_2$.

Предварительные оценки, установленные в леммах 1—5 для производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$, показывают, что они от размеров области не зависят. Поэтому легко предвидеть, что они верны и для бесконечных областей.

Обозначим через $\{D_N\}$ последовательность областей, расширяющихся до всего пространства E_2 и через Γ_N — границы D_N . Для каждой области D_N рассмотрим задачу (1)—(2) и составим для каждой такой задачи свою спектральную функцию: $\theta_N(x, y, u, v; \mu)$.

Далее, рассмотрим семейство функций

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \theta_N(x, y, u, v; \mu) \right\}. \quad (8)$$

Не трудно доказать, что семейство функций (8) равномерно (по N) ограничено и по (x, y) и (u, v) равностепенно непрерывно. Поэтому в силу известной теоремы Арцелля—Хелли семейство функций (8) равномерно сходится. Тогда в оценках, установленных в леммах 1—5, можно перейти к пределу. Таким образом вышеупомянутые оценки имеют место и для производных спектральной функции уравнения (1), заданного во всем пространстве E_2 .

Используя одну специальную тауберову теорему В. А. Марченко ⁽⁷⁾, в этом случае мы получаем более точную асимптотическую формулу, чем те, которые были установлены в теоремах 1 и 2. А именно, справедлива

Теорема 3. Если функция $q(x, y)$ в каждой конечной об-

ласть ограничена, то при каждом фиксированном значении (x, y) и (u, v) справедлива асимптотическая формула

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, y, u, v; \mu) - \frac{\partial}{\partial x} \theta_2^*(x, y, u, v; \mu) + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{\pi}} u q(u, v) \mu \int_r^1 \sqrt{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{J_{1/2}(\mu t)}{(\mu t)^{1/2}} \right] dt \right\} = 0, \quad (9)$$

где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ спектральная функция уравнения (1) для E_2 . Равенство (9) имеет место равномерно в каждой конечной области.

Аналогичные теоремы имеют место и для старших производных спектральной функции $\theta(x, y, u, v; \mu)$.

Теорема 3 получена в предположении, что отрицательный спектр задачи (1)–(2), рассмотренной во всем пространстве E_2 , ограничен снизу. Если отрицательный спектр снизу не ограничен, то справедлива

Теорема 4. В условиях теоремы 3 при $\mu \rightarrow \infty$ имеет место оценка

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, y, u, v; \mu) = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \theta(x, y, u, v; -\infty) + \frac{2}{\pi} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{J_3(\mu r)}{r^3} \right] - \\ - \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} u q(u, v) \int_r^1 \sqrt{t^2 - r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{J_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}} \right] dt + O(\mu^{-2}), \quad (10)$$

где $\theta(x, y, u, v; \mu)$ — любая спектральная функция задачи (1)–(2), рассмотренной во всем пространстве E_2 .

Оценка (10) имеет место равномерно в каждой конечной области.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

— $\Delta + q(x, y)$ օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի
դիֆերենցիալ մասին

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$-\Delta u + q(x, y)u = \lambda u, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

որտեղ $q(x, y)$ ֆունկցիան իրական անընդհատ ֆունկցիա է հարթության վերջավոր $\bar{D}$ տիրույթում, իսկ Γ -ն նրա եզրագիծն է։ Քանի որ $q(x, y)$ ֆունկցիան սահմանափակ է, ապա առանց ընդհանրությունը խախտելու կարելի է ենթադրել, որ (1)–(2) խնդրի սպեկտրը բացասական չէ։ Դիցուք $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y), \dots$ — մի նշանակված

են (1) — (2) խնդրի որթոնորմավորված սեփական ֆունկցիաները, իսկ $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_n^2, \dots$ ով՝ համապատասխան սեփական արժեքները: $\theta(x, y, u, v; \mu)$ -ով նշանակենք (1) — (2) խնդրի սպեկտրալ ֆունկցիան՝

$$\theta(x, y, u, v; \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} \varphi_n(x, y) \varphi_n(u, v), \quad \mu > 0,$$

իսկ այնուհետև $\theta(x, y, u, v; \mu)$ -ն որպես μ փոփոխականի ֆունկցիա բացասական μ -երի համար շարունակենք զրոյով:

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $\theta(x, y, u, v; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի ածանցյալների ափսոսանքով վարքը μ -ի մեծ արժեքների համար: Նույն հարցը (1) հավասարման համար միաշափ տարածության մեջ ուսումնասիրվել է մեր կողմից (1, 2) հոդվածներում: Լապլասի օպերատորի համար ցանկացած չափի տարածության մեջ, ինչպես նաև (1) հավասարման համար եռաշափ տարածության մեջ նույն հարցը ուսումնասիրվել է Բ. Մ. Լևիտանի կողմից (3, 4):

Նշանակենք $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ -ով (1) հավասարման սպեկտրալ ֆունկցիան ամբողջ հարթության համար, երբ $q(x, y) \equiv 0$:

Թեորեմ 1. Դիցուք γ -ն կամայական դրական քիվ է: Նշանակենք D_γ -ով D տիրույթի այն կետերի բազմությունը, որոնց հեռավորությունը D տիրույթի Γ եզրագծից ավելի մեծ չէ, քան γ -ն: Եթե $q(x, y)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի ներառյալ $\alpha + \beta - 1$ -րդ կարգի սահմանափակ մասնական ածանցյալներ, ապա երբ (x, y) և (u, v) կետերը պատկանում են D_γ տիրույթին, գոյություն ունի այնպիսի հաստատուն $C = C_\gamma$, որ երբ $\mu \rightarrow \infty$ տեղի ունի հետևյալ ասիմպտոտիկ բանաձևը՝

$$|D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta_S(x, y, u, v; \mu) - D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta_S^*(x, y, u, v; \mu)| < C_\gamma \mu^{\alpha+\beta+1-S},$$

Դիցուք $\theta_S^*(x, y, u, v; \mu)$ -ով նշանակված են $\theta^*(x, y, u, v; \mu)$ սպեկտրալ ֆունկցիայի U Ռիսի S -րդ կարգի միջինները, այսինքն (տես (8), էջ 296)՝

$$\theta_S^*(x, y, u, v; \mu) = \frac{2S-1}{\pi} \mu^{1-S} \frac{J_{1+S}(\mu r)}{r^{1+S}},$$

Թեորեմ 2. Դիցուք γ -ն, D_γ -ն և C_γ -ն սահմանված են այնպես, ինչպես թեորեմ 1-ում: Եթե $q(x, y)$ ֆունկցիան բավարարում է նախորդ թեորեմի պայմանին, ապա երբ $(x, y), (u, v) \in D_\gamma$, $\mu \rightarrow \infty$ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝ ($S > 0$)

$$\left| \frac{1}{\Gamma(s+1)} \sum_{\mu_n < \mu} \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu^2} \right)^s D_{xy}^\alpha \varphi_n(x, y) D_{uv}^\beta \varphi_n(u, v) - \right.$$

$$\left. D_{xy}^\alpha D_{uv}^\beta \theta_S(x, y, u, v; \mu) \right| < C_\gamma \mu^{\alpha+\beta+1-S}.$$

Ուսումնասիրված է նաև անվերջ տիրույթների դեպքը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ И. С. Саргсян, Известия АН СССР, серия матем., т. 21, 263 (1957). ² И. С. Саргсян, Известия АН АрмССР, серия физико-матем. наук, т. X, 3 (1957). ³ Б. М. Левитан, Математический сборник, (в печати). ⁴ Б. М. Левитан, Математический сборник, т. 39 (81):1, 37 (1956). ⁵ Б. М. Левитан, Труды Московского математического общества, т. IV (1955). ⁶ Б. М. Левитан, Известия АН СССР, серия матем., т. 20, 437 (1956). ⁷ В. А. Марченко, Известия АН СССР, серия матем., т. 19, 381 (1955). ⁸ Б. М. Левитан, Математический сборник, т. 35 (77):2, 267 (1954).