

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра

(Представлено Н. Х. Арутюняном 15.XII.1957)

Известно ⁽¹⁾, что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению функции напряжений $\Phi(r, z)$ (r — направление радиуса, z — направление оси вращения), которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1.1)$$

а на поверхности тела задается законом распределения напряжений или перемещений.

1. Решая уравнение (1.1) методом разделения переменных ⁽²⁾, для круглого сплошного цилиндра получим:

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + \\ & + G_k \lambda_k I_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя i -го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_i(x)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента ⁽³⁾, μ_k — корни уравнения

$$J_1(xR) = 0, \quad (1.3)$$

$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, l — длина, R — радиус цилиндра.

Рассмотрим напряженное состояние круглого цилиндра при следующих граничных условиях



$$\left. \begin{aligned}
 u_r(R, z) = f_1(z) &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \lambda_k z \\
 \tau_{rz}(R, z) = f_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k z
 \end{aligned} \right\} (0 < z < l)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z(r, 0) = f_3(r) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r) \\
 \tau_{rz}(r, 0) = f_4(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k r) \\
 \sigma_z(r, l) = f_5(r) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r) \\
 \tau_{rz}(r, l) = f_6(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_1(\mu_k r)
 \end{aligned} \right\} (0 < r < R)$$
(1.4)

Здесь мы допускаем, что функции $\{f_i\}$ кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в указанных интервалах.

В силу симметричного распределения внешней нагрузки относительно оси z имеем также

$$\tau_{rz}(0, z) = u_r(0, z) = 0. \quad (1.5)$$

Рассматриваемая задача может быть использована для получения точного решения некоторых задач по изгибу толстых круглых плит (4, 5, 8).

Вычислив по обычным формулам ⁽¹⁾ с помощью выражения (1.2) напряжения σ_z , τ_{rz} и перемещение u_r и удовлетворив условиям (1.4) и (1.5), для определения неизвестных постоянных интегрирования, входящих в выражение (1.2), получим ряд соотношений.

При получении этих соотношений пользуемся разложениями Фурье—Дини функций $I_0(\lambda_k r)$ и $r I_1(\lambda_k r)$ по функциям $\{J_0(\mu_k r)\}$ ⁽²⁾, где μ_k —корни уравнения (1.3).

Из указанных общих соотношений для постоянных интегрирования получаем следующие значения

$$A = -\frac{\mu g_0}{2R}, \quad (1.6)$$

$$B = \frac{1}{6(1-\nu)} \left\{ a_0 + \frac{2(2-\nu)\mu g_0}{R} - \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \right\}, \quad (1.7)$$

$$G_k = \frac{q_k + 2\mu\lambda_k g_k}{2(1-\nu)\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)}, \quad (1.8)$$

$$E_k = -\frac{1}{\lambda_k^2 I_1(\lambda_k R)} \left[2\mu g_k + \frac{q_k + 2\mu\lambda_k g_k}{2(1-\nu)} \cdot \frac{R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} \right], \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} D_k = & \frac{\operatorname{sh} \mu_k l}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l - \mu_k^2 l^2} \left\{ \frac{1}{\mu_k^3} \left[a_k \operatorname{sh} \mu_k l - b_k \mu_k l + d_k (1 - \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l) + \right. \right. \\ & \left. \left. + c_k \left(\frac{\mu_k l}{\operatorname{sh} \mu_k l} - \operatorname{ch} \mu_k l \right) \right] + \right. \\ & + \frac{2}{\mu_k^3 R J_0(\mu_k R)} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho q_\rho}{\lambda_\rho^2 + \mu_k^2} [(-1)^\rho \mu_k l - \operatorname{sh} \mu_k l] + \\ & \left. + \frac{2}{(1-\nu) \mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho (q_\rho + 2\mu\lambda_\rho g_\rho)}{(\lambda_\rho^2 + \mu_k^2)^2} [(-1)^\rho \mu_k l - \operatorname{sh} \mu_k l] \right\}, \quad (1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k = & \frac{\operatorname{sh} \mu_k l}{\operatorname{sh}^2 \mu_k l - \mu_k^2 l^2} \left\{ \frac{1}{\mu_k^3} \left[-a_k \left(\frac{\mu_k l}{\operatorname{sh} \mu_k l} + \operatorname{ch} \mu_k l \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_k (1 + \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l) + c_k \operatorname{sh} \mu_k l + d_k \mu_k l \right] + \right. \\ & + \frac{2}{\mu_k^3 R J_0(\mu_k R)} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho q_\rho}{\lambda_\rho^2 + \mu_k^2} \left[\frac{\mu_k l}{\operatorname{sh} \mu_k l} + \operatorname{ch} \mu_k l + \right. \\ & \left. + (-1)^{\rho+1} (1 + \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l) \right] + \frac{2}{(1-\nu) \mu_k R J_0(\mu_k R)} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho}{(\lambda_\rho^2 + \mu_k^2)^2} (q_\rho + \\ & \left. + 2\mu\lambda_\rho g_\rho) \left[\frac{\mu_k l}{\operatorname{sh} \mu_k l} + \operatorname{ch} \mu_k l + (-1)^{\rho+1} (1 + \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l) \right] \right\}, \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$B_k = \frac{c_k}{\mu_k^3} - 2\nu C_k, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} A_k = & (1-2\nu) D_k - \frac{a_k}{\mu_k^3} + \frac{2}{\mu_k R J_0(\mu_k R)} \cdot \left[\frac{1}{\mu_k^2} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho q_\rho}{\lambda_\rho^2 + \mu_k^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{1-\nu} \sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\lambda_\rho (q_\rho + 2\mu\lambda_\rho g_\rho)}{(\lambda_\rho^2 + \mu_k^2)^2} \right], \quad (1.13) \end{aligned}$$

где ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, а также следующее равенство

$$a_0 - b_0 = \frac{4}{R} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k}, \quad (1.14)$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих вдоль оси цилиндра.

Подставляя найденные значения постоянных интегрирования из (1.6)–(1.13) в формулы напряжений и перемещений, получим радиальное перемещение u_r и напряжения. Перемещение же u_z определится с точностью до постоянного C , которым обуславливается жесткое перемещение тела по направлению оси z .

Постоянное число C определится из условия закрепления цилиндра.

2. Для полого цилиндра решения уравнения (1.1) берем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & z(Ar^2 + Bz^2 + Cz) + \ln r(Dr^2 + Ez^2) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + F_k K_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + \\ & + H_k \lambda_k r K_1(\lambda_k r)] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + \\ & + B_k \operatorname{ch} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) W_0(\beta_k r), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l},$$

где $K_i(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода, функция $W_i(\beta_k r)$ имеет вид

$$W_i(\beta_k r) = \frac{J_i(\beta_k r)}{J_i(\beta_k R)} - \frac{Y_i(\beta_k r)}{Y_i(\beta_k R)}, \quad (2.2)$$

$Y_i(x)$ — функция Бесселя от действительного аргумента второго рода, β_k — корни уравнения $W_1(\beta s) = 0$ или

$$J_1(s\beta) Y_1(\beta R) - J_1(R\beta) Y_1(s\beta) = 0, \quad (2.3)$$

s — радиус внутреннего круга поперечного сечения.

Рассмотрим напряженное состояние полого цилиндра при следующих граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(R, z) = f_1(z) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k z \\ \tau_{rz}(R, z) = f_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \lambda_k z \end{aligned} \right\} \quad (0 < z < l) \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(s, z) = f_3(z) &= \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos \lambda_k z \\ \tau_{rz}(s, z) = f_4(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \lambda_k z \end{aligned} \right\} (0 < z < l) \quad (2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_z(r, 0) &= 0 \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_5(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} h_k W_1(\beta_k r) \\ u_z(r, l) = f_6(r) &= g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k W_0(\beta_k r) \\ \tau_{rz}(r, l) = f_7(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k W_1(\beta_k r) \end{aligned} \right\} (s < r < R) \quad (2.5)$$

Здесь также допускаем, что функции $\{f_i\}$ можно представить в виде рядов Фурье и Фурье — Дини.

Рассматриваемая задача может быть использована для определения напряженного состояния цилиндрической трубы, находящейся под действием внешних нагрузок, приложенных к ее боковой поверхности [6, 7].

Вычислив с помощью выражения (2.1) напряжения σ_r , τ_{rz} и перемещение u_z , удовлетворив далее условиям (2.4) и (2.5), для определения постоянных интегрирования получим ряд соотношений.

При получении этих соотношений пользуемся разложениями функций $\operatorname{sh} \beta_k z$, $\operatorname{ch} \beta_k z$, $z \operatorname{sh} \beta_k z$ и $z \operatorname{ch} \beta_k z$ по функциям $\left\{ \cos \frac{p\pi z}{l} \right\}$, где

l — длина трубы.

Из этих соотношений постоянные интегрирования определяются следующим образом

$$A = \frac{\mu \nu g_0}{l} + \frac{1 - 2\nu}{4l} \left[-a_0 l + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_0(\beta_k R)}{\beta_k} (q_k - h_k) \right], \quad (2.6)$$

$$B = \frac{\mu (1 - 2\nu) g_0}{3l} - \frac{1 - \nu}{3l} \left[-a_0 l + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_0(\beta_k R)}{\beta_k} (q_k - h_k) \right], \quad (2.7)$$

$$C = D = E = 0, \quad (2.8)$$

$$A_k = \frac{1}{2(1-\nu)\beta_k^3 \operatorname{sh} \beta_k l} \left\{ [2(1-2\nu) + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l] q_k + \right. \\ \left. + \left[2(2\nu-1) \operatorname{ch} \beta_k l + \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right] h_k - (2\nu + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) 2\mu\beta_k g_k \right\}, \quad (2.9)$$

$$B_k = \frac{(1-2\nu) h_k}{(1-\nu) \beta_k^3}, \quad (2.10)$$

$$C_k = \frac{h_k}{2(1-\nu) \beta_k^3}, \quad (2.11)$$

$$D_k = \frac{2\mu\beta_k g_k + q_k - h_k \operatorname{ch} \beta_k l}{2(1-\nu) \beta_k^3 \operatorname{sh} \beta_k l}. \quad (2.12)$$

Для определения постоянных E_k , G_k , F_k и H_k получаем следующую систему четырех линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} E_k a_k^{(1)}(R) + G_k b_k^{(1)}(R) + F_k c_k^{(1)}(R) + H_k d_k^{(1)}(R) &= N_k^{(1)} \\ E_k a_k^{(1)}(s) + G_k b_k^{(1)}(s) + F_k c_k^{(1)}(s) + H_k d_k^{(1)}(s) &= N_k^{(2)} \\ E_k a_k^{(2)}(R) + G_k b_k^{(2)}(R) + F_k c_k^{(2)}(R) + H_k d_k^{(2)}(R) &= N_k^{(3)} \\ E_k a_k^{(2)}(s) + G_k b_k^{(2)}(s) + F_k c_k^{(2)}(s) + H_k d_k^{(2)}(s) &= N_k^{(4)} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_k^{(1)}(x) &= I_1(\lambda_k x) \\ b_k^{(1)}(x) &= 2(1-\nu) I_1(\lambda_k x) + \lambda_k x I_0(\lambda_k x) \\ c_k^{(1)}(x) &= -K_1(\lambda_k x) \\ d_k^{(1)}(x) &= 2(1-\nu) K_1(\lambda_k x) - \lambda_k x K_0(\lambda_k x) \\ a_k^{(2)}(x) &= I_0(\lambda_k x) - \frac{I_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x} \\ b_k^{(2)}(x) &= (1-2\nu) I_0(\lambda_k x) + \lambda_k x I_1(\lambda_k x) \\ c_k^{(2)}(x) &= K_0(\lambda_k x) + \frac{K_1(\lambda_k x)}{\lambda_k x} \\ d_k^{(2)}(x) &= -(1-2\nu) K_0(\lambda_k x) + \lambda_k x K_1(\lambda_k x) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$N_k^{(1)} = \frac{c_k}{\lambda_k^3}$$

$$N_k^{(2)} = \frac{d_k}{\lambda_k^3}$$

$$N_k^{(3)} = -\frac{a_k}{\lambda_k^3} + \frac{2}{\lambda_k^3 l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p R)}{\lambda_k^2 + \beta_p^2} [(-1)^k q_p - h_p] +$$

$$+ \frac{2}{(1-\nu) \lambda_k l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p R)}{(\lambda_k^2 + \beta_p^2)^2} [(-1)^k (2\mu \beta_p g_p + q_p) - h_p]$$

(2.15)

$$N_k^{(4)} = -\frac{b_k}{\lambda_k^3} + \frac{2}{\lambda_k^3 l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p S)}{\lambda_k^2 + \beta_p^2} [(-1)^k q_p - h_p] +$$

$$+ \frac{2}{(1-\nu) \lambda_k l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p W_0(\beta_p S)}{(\lambda_k^2 + \beta_p^2)^2} [(-1)^k (2\mu \beta_p g_p + q_p) - h_p].$$

Решая систему (2.13), получим значения для постоянных E_k , G_k , F_k и H_k .

Для полого цилиндра из упомянутых выше соотношений получается также следующее равенство

$$a_0 - b_0 = \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_0(\beta_k R) - W_0(\beta_k S)}{\beta_k} (q_k - h_k), \quad (2.16)$$

которое является уравнением равновесия сил, действующих в радиальном направлении.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱՔՐԱ ՀԱՄՅԱՆ

Կլոր գլանի հավասարակշռության մի բանի խնդիրներ

Հոդվածում դիտարկվում է կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիաների խնդրի երկու դեպք, երբ մակերևույթային պայմանները տրվում են գլանի հիմքերի և կողմնային մակերևույթի վրա լարումների և տեղափոխումների միջոցով:

Առաջին խնդրում հոծ գլանի համար գլանի հիմքերի վրա տրվում են լարումները, իսկ կողմնային մակերևույթի վրա՝ շոշափող լարումները և տեղափոխումները շառավղի ուղղությամբ: Դիտված խնդիրը կարող է օգտագործվել կլոր հաստ սալերի ծովան մի բանի խնդիրների լուծումներն ստանալու համար:

Երկրորդ խնդրում սնամեջ գլանի հիմքերի վրա տրվում են շոշափող լարումները և տեղափոխումները առանցքի ուղղությամբ, իսկ կողմնային մակերևույթի վրա տրվում են լարումները: Այս խնդիրը կարող է օգտագործվել արտաքին բեռի ազդեցության տակ գտնվող հաստ պատեր ունեցող խողովակի լարվածային վիճակը որոշելու համար, երբ արտաքին բեռը կիրառված է խողովակի կողմնային մակերևույթի վրա:

Ննդիրների լուծումները ներկայացվում են շարքերով՝ ըստ Բեսսելի և եռանկյունաչափական ֆունկցիաների:

• С. П. Тимошенко, Теория упругости. ОНТИ, М., 1937. • Б. Л. Абрамян, ДАН Арм. ССР, т. XIX, № 1, (1954). • Э. Грей, Г. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиниздат, М., 1949. • А. И. Лурье, ПММ, т. VI, в. 2—3 (1942). • В. К. Проколов, ПММ, т. XIV, в. 5 (1950). • Г. С. Шапиро, ПММ, т. VII, в. 5 (1943). • В. К. Проколов, Осесимметричная задача теории упругости для изотропного цилиндра*, Труды Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина, № 2, 1950, стр. 286—303. • Л. С. Лейбензон, К теории безбалочных покрытий*, Собрание трудов, т. I, Изд. АН СССР, стр. 100—148, 1951.