ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXV 1957 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян и М. М. Манукян

# Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях

(Представлено Н. Х. Арутюняном 5.VII.1957)

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника при произвольных перемещениях на кромках прямоугольника.

Решение этой задачи, как это имело место в плоской задаче теории упругости для прямоугольника в напряжениях [1, 2], сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна и имеет ограниченные сверху свободные члены.

Как известно, в плоской задаче теории упругости, при плоском напряженном состоянии тела, перемещения удовлетворяют следующим уравнениям Ляме:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda' + \mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\Delta^2 u = 0,\\
&(\lambda' + \mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu\Delta^2 v = 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где

$$
\lambda' = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + \mu}, \tag{2}
$$

$\mu$, $\lambda$ — коэффициенты Ляме,
$u$ и $v$ — перемещения по направлению осей $ox$ и $oy$,

$$
\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.
$$

Напряжения определяются формулами:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x(x, y) = (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda'\frac{\partial v}{\partial y},\\
&\sigma_y(x, y) = \lambda'\frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda' + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y},
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Решения для уравнений (1) ищем в виде

$$u(x, y) = -ay + b + \sum_{k=1}^{\infty} \cos\alpha_k x\,[A_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + B_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y +$$

$$+\alpha_k y(C_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y)] + \sum_{k=1}^{\infty}\sin\beta_k y\left[(B_k^{(2)} - \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu}C_k^{(2)}\right]\operatorname{sh}\beta_k x +$$

$$+\left(A_k^{(2)} - \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu}D_k^{(2)}\right)\operatorname{sh}\beta_k x + \beta_k x\,(D_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + C_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k x)\Big];$$

$$v(x, y) = ax + c + \sum_{k=1}^{\infty}\cos\beta_k y\,[A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + B_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k x + \tag{4}$$

$$+\beta_k x\,(C_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)}\operatorname{sh}\beta_k x)] + \sum_{k=1}^{\infty}\sin\alpha_k x\,\Big[\Big(B_k^{(1)} -$$

$$-\frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu}C_k^{(1)}\Big)\operatorname{ch}\alpha_k y + \left(A_k^{(1)} - \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu}D_k^{(1)}\right)\sin\alpha_k y + \alpha_k y\,(D_k^{(1)}\operatorname{ch}\alpha_k y +$$

$$+C_k^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_k y)],$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h}, \tag{5}$$

$a$, $b$, $c$ — постоянные, $l$ — длина прямоугольника, а $h$ — высота.

Полагаем, что перемещения на кромках прямоугольника заданы произвольным образом.

$$\begin{aligned}
&u(o, y) = f_1(y) \qquad u(l, y) = f_3(y) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (o < y < h) \\
&v(o, y) = f_2(y) \qquad v(l, y) = f_4(y) \\
&u(x, o) = f_5(x) \qquad u(x, h) = f_7(x) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (o < x < l) \\
&v(x, o) = f_6(x) \qquad v(x, h) = f_8(x),
\end{aligned} \tag{6}$$

где функции $f_i$ — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

Представляя функции $f_i$ в виде рядов Фурье, получим условия:

$$u(o, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\beta_k y,$$

$$v(o, y) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\cos\beta_k y, \tag{7}$$

$$u(l, y) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \sin \beta_k y, \qquad (o < y < h)$$

$$v(l, y) = \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \beta_k y,$$

$$u(x, o) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \alpha_k x,$$

$$v(x, o) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \alpha_k x, \qquad (8)$$

$$u(x, h) = \frac{l_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} l_k \cos \alpha_k x, \qquad (o < x < l)$$

$$v(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \alpha_k x.$$

Удовлетворив условиям (7) и (8) для определения неизвестных коэффициентов интегрирования, входящих в выражения (4), получим ряд соотношений.

Из этих соотношений коэффициенты $a$, $b$, $c$ и $A_k^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ определяются непосредственно

$$a = b = c = o, \quad A_k^{(1)} = c_k, \quad A_k^{(2)} = b_k, \qquad (9)$$

коэффициенты $B_k^{(i)}$ из этих соотношений выражаются через коэффициенты $C_k^{(i)}$ и $D_k^{(i)}$, а для определения этих последних получается совокупность из четырех бесконечных систем линейных уравнений.

Введя новые неизвестные

$$D_p^{(1)} + C_p^{(1)} \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} = \frac{h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \operatorname{cth} \frac{\alpha_p h}{2} \cdot X_p^{(1)}, \qquad (10)$$

$$D_p^{(1)} + C_p^{(1)} \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} = \frac{h}{\operatorname{sh} \alpha_p h} \operatorname{th} \frac{\alpha_p h}{2} \cdot Y_p^{(1)}.$$

$$D_p^{(2)} + C_p^{(2)} \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2} = \frac{l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2} \cdot X_p^{(2)}, \qquad (11)$$

$$D_p^{(2)} + C_p^{(2)} \operatorname{th} \frac{\beta_p l}{2} = \frac{l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \operatorname{th} \frac{\beta_p l}{2} \cdot Y_p^{(2)},$$

эту совокупность приведем к виду

$$
\left.
\begin{aligned}
Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + N_p^{(2)}, \\
X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + M_p^{(2)} \\
Y_p^{(1)} &= \sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + N_p^{(1)} \\
X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4\ldots}^{\infty} c_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + M_p^{(1)}
\end{aligned}
\right|
\quad (p = 1,2,\ldots)
\qquad (12)
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{pk}^{(1)} &= \frac{4\,\beta_p^2}{h\psi_p^{(2)}} \left[1 + (-1)^p\right] \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
b_{pk}^{(1)} &= \frac{4\,\beta_p^{(2)}}{h\psi_p^{(2)}} \left[1 + (-1)^{p+1}\right] \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}; \\
a_{pk}^{(2)} &= \frac{4\,\alpha_p^2}{l\psi_p^{(1)}} \left[1 + (-1)^p\right] \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \\
b_{pk}^{(2)} &= \frac{4\,\alpha_p^2}{l\psi_p^{(1)}} \left[1 + (-1)^{p+1}\right] \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}
\end{aligned}
\right|
\quad
\begin{aligned}
&(k = 1,3,\ldots) \\
&(p = 1,2,\ldots)
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
c_{pk}^{(1)} &= \frac{4\,\beta_p^2}{h\varphi_p^{(2)}} \left[1 + (-1)^p\right] \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
d_{pk}^{(1)} &= \frac{4\,\beta_p^2}{h\varphi_p^{(2)}} \left[1 + (-1)^{p+1}\right] \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}, \\
c_{pk}^{(2)} &= \frac{4\,\alpha_p^2}{l\varphi_p^{(1)}} \left[1 + (-1)^p\right] \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2}, \\
d_{pk}^{(2)} &= \frac{4\,\alpha_p^2}{l\varphi_p^{(1)}} \left[1 + (-1)^{p+1}\right] \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^{(2)})^2},
\end{aligned}
\right|
\quad
\begin{aligned}
&(k = 2,4,\ldots) \\
&(p = 1,2,\ldots)
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_p^{(1)} &= \frac{h}{l}\left(N + \frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}, \\
\varphi_p^{(2)} &= \frac{l}{h}\left(N + \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right)\operatorname{cth}\frac{\beta_p l}{2}, \\
\psi_p^{(1)} &= \frac{h}{l}\left(N - \frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)\operatorname{th}\frac{\alpha_p h}{2}, \\
\psi_p^{(2)} &= \frac{l}{h}\left(N - \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right)\operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2}.
\end{aligned}
\right|
\quad (p = 1,2,\ldots)
\qquad (15)
$$

$$N = \frac{\lambda' + 3\mu}{\lambda' + \mu}. \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_p^{(2)} &= -\frac{\beta_p}{\psi_p^{(2)}}\Bigg\{(a_p - h_p) + (g_p + b_p)\,\mathrm{th}\,\frac{\beta_p l}{3} - \\
&\quad - \frac{4\beta_p}{h}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left[c_k + (-1)^{p+1}e_k\right]\frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}\Bigg\}, \\
M_p^{(2)} &= -\frac{\beta_p}{\varphi_p^{(2)}}\Bigg\{(a_p + h_p) - (g_p - b_p)\,\mathrm{cth}\,\frac{\beta_p l}{2} - \\
&\quad - \frac{4\beta_p}{h}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[c_k + (-1)^{p+1}e_k\right]\frac{1}{\alpha_k^2 + \beta_p^2}\Bigg\}, \\
N_p^{(1)} &= -\frac{\alpha_p}{\psi_p^{(1)}}\Bigg\{(d_p - f_p) + (e_p + c_p)\,\mathrm{th}\,\frac{\alpha_p h}{2} - \\
&\quad - \frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left[b_k + (-1)^{p+1}g_k\right]\frac{1}{\beta_k^2 + \alpha_p^2}\Bigg\}, \\
M_p^{(1)} &= -\frac{\alpha_p}{\varphi_p^{(1)}}\Bigg\{(d_p + f_p) - (e_p - c_p)\,\mathrm{cth}\,\frac{\alpha_p h}{2} - \\
&\quad - \frac{4\alpha_p}{l}\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty}\left[b_k + (-1)^{p+1}g_k\right]\frac{1}{\beta_k^2 + \alpha_p^2}\Bigg\}.
\end{aligned}\right| \quad (p = 1,2,\ldots) \tag{17}$$

Легко заметить, что системы (12) разбиваются на четыре совокупности, причем в каждую совокупность войдут две системы:

$$\left.\begin{aligned}
Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + N_p^{(2)}, \\
Y_p^{(1)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} b_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + N_p^{(1)}.
\end{aligned}\right| \quad (p = 1,3,\ldots) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
Y_p^{(2)} &= \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} a_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + N_p^{(2)}, && (p = 2,4,\ldots) \\
X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(2)} Y_k^{(2)} + M_p^{(1)}, && (p = 1,3\ldots) \\
X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} d_{pk}^{(1)} Y_k^{(1)} + M_p^{(2)}, && (p = 1,3,\ldots)
\end{aligned} \tag{19}$$

$$Y_p^{(1)} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + N_p^{(2)}, \qquad (p = 2,4,\dots) \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} X_p^{(2)} &= \sum_{k=2,4\dots}^{\infty} c_{pk}^{(1)} X_k^{(1)} + M_p^{(2)}, \\ X_p^{(1)} &= \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} c_{pk}^{(2)} X_k^{(2)} + M_p^{(1)}. \end{aligned}\right| \qquad (p = 2,4\dots) \tag{21}$$

Каждую из совокупностей (18)—(21) можно написать в виде одной системы

$$F_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} F_n + B_m, \qquad (m = 1,2,\dots). \tag{22}$$

Например, чтобы системы (18) привести к виду (22), нужно вывести обозначения

$$\left.\begin{aligned} F_{2i-1} &= Y_{2i-1}^{(2)}, \ B_{2i-1} = N_{2i-1}^{(2)}, \\ F_{2i} &= Y_{2i-1}^{(1)}, \ B_{2i} = N_{2i-1}^{(1)}, \end{aligned}\right| \qquad (i = 1, 2,\dots)$$

$$\left.\begin{aligned} A_{2i-1,\,2q} &= b_{2i-1,\,2q-1}^{(1)}, \ A_{2i-1,\,2q-1} = 0, \\ A_{2i,\,2q-1} &= b_{2i-1,\,2q-1}^{(2)}, \ A_{2i,\,2q} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (i, q = 1, 2,\dots). \tag{23}$$

Аналогичные обозначения вводятся также и для остальных систем.

Пользуясь обозначениями (13)—(17) и (23) для каждой совокупности в отдельности, покажем, что система (22) вполне регулярна.

Для совокупности (18) при четных $m$ имеем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2i,\,n}| = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} |b_{pk}^{(1)}| = \frac{8\beta_p^2}{h\psi_p^{(2)}} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right)^2}}{N - \dfrac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}} < \frac{1}{\sqrt{N^2 - 1}}. \tag{24}$$

При этом использованы значения рядов:

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} = \frac{l}{8\beta_p^3} \operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2} \cdot \left(1 - \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right),$$

$$\sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\alpha_k^2}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} = \frac{l}{8\beta_p} \operatorname{th}\frac{\beta_p l}{2} \cdot \left(1 + \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh}\beta_p l}\right). \tag{25}$$

и неравенство

$$\sum_i a_i b_i \leq \sqrt{\sum_i a_i^2 \cdot \sum_i b_i^2}.$$

Аналогично, при нечетных $m$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2l-1,\,n}| = \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} |b_{pk}^{(2)}| \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{1-\left(\dfrac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right)^2}}{N - \dfrac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}} < \frac{1}{\sqrt{N^2-1}}. \tag{26}$$

Таким же путем для других совокупностей (19)—(21) найдем

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(1)}| < \frac{1}{\sqrt{N^2-1}}, \tag{27}$$

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |d_{pk}^{(2)}| < \frac{1}{N}, \tag{28}$$

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |d_{pk}^{(1)}| < \frac{1}{N}, \tag{29}$$

$$\sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty} |a_{pk}^{(2)}| < \frac{1}{\sqrt{N^2-1}}, \tag{30}$$

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |c_{pk}^{(1)}| < \frac{1}{N}, \tag{31}$$

$$\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} |c_{pk}^{(2)}| < \frac{1}{N}. \tag{32}$$

При этом использованы значения рядов

$$\begin{aligned} &\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} = \frac{h}{8\alpha_p^3}\left[\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\left(1+\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right) - \frac{4}{\alpha_p h}\right], \\ &\sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} \frac{\beta_k^2}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2} = \frac{h}{8\alpha_p}\operatorname{cth}\frac{\alpha_p h}{2}\left(1-\frac{\alpha_p h}{\operatorname{sh}\alpha_p h}\right). \end{aligned} \tag{33}$$

При плоском напряженном состоянии всегда $N^2 > 2$, следовательно $\frac{1}{N}$ и $\frac{1}{\sqrt{N^2-1}}$ будут меньше единицы и все системы (18)—(21) будут вполне регулярными.

Свободные члены систем этих совокупностей ограничены сверху. Это обстоятельство позволяет пользоваться теорией регулярных систем линейных уравнений и оценить неизвестные коэффициенты с любой точностью, а с помощью этих оценок определяются верхние и нижние границы для перемещений и напряжений.

Полученным результатом можно пользоваться и при плоской деформации, только в этом случае следует во всех соотношениях заменить $\lambda'$ через $\lambda$.

Для этого случая $N = 3 - 4\nu$ и система (22) может быть регулярной и вполне регулярной, если $\nu \leqslant 0{,}367$, однако это ограничение не строгое, оно может быть снято, если пользоваться лучшими оценками.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ ԵՎ Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

**Առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը ուղղանկյան համար, երբ հայտնի են տեղափոխությունները եզրերի վրա**

*Հոդվածում քննարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյան եզրերն արտաքին ուժերի ազդեցության տակ ձևափոխվում են տված օրենքով:*

*Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը: Ապացուցվում է, որ ստացված սիստեմը լիովին կանոնավոր է և ունի վերևից սահմանափակված ազատ անդամներ:*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. Л. Абрамян*, ДАН АрмССР, т. XXI, № 5 (1955). [2] *Б. Л. Абрамян*, ПММ, том XXI, вып. 1 (1957).