ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXV 1957 4

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Сходимость дифференцированного разложения по собственным функциям оператора Шредингера на плоскости

(Представлено М. М. Джрбашяном 7.VII.1957)

1. Постановка вопроса. Обозначим через $q(x)$ действительную непрерывную функцию, определенную в некоторой конечной области D двухмерного пространства Эвклида E_2. Через Γ обозначим границу области D.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\Delta u + \{ \lambda - q(x) \} u = 0, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ собственные значения задачи (1)—(2) и через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ (x—точка пространства E_2)—соответствующие собственные функции. Так как по предположению функция $q(x)$ ограничена, то, не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что спектр задачи (1)—(2) не отрицателен.

Пусть $f(x) \subset L_2(D)$. Положим

$$c_n = \int\limits_{(D)} f(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

и рассмотрим ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x). \tag{3}$$

В настоящей работе изучается вопрос о дифференцировании ряда (3). Аналогичный вопрос в трехмерном пространстве и для оператора Лапласа изучен Б. М. Левитаном ([1]). Основной результат для уравнения (1) и оператора Лапласа один и тот же и заключается в том, что каждое дифференцирование ряда (1) повышает порядок суммирования по М. Риссу на единицу. Этот результат имеет место и для одномерного случая, который исследован нами ([2]). Оказывается, что, кроме теорем суммирования по М. Риссу производных разложений по собственным функциям оператора Шредингера функций с интегрируемым квадратом, имеет место и теорема сходимости дифференцированных разложений, если только разлагаемая функция удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Цель настоящей работы доказать именно такую теорему. Утверждается, что справедлива *теорема: пусть функция* $f(x)$ *в области* D *имеет вторые частные производные, причем* $\Delta f - q(x) f \subset L_2(D)$ *и пусть* $f(x)$ *удовлетворяет краевому условию* (2). *Предположим, что в окрестности внутренней (по отношению к* D*) точки* x_0 *функция* $q(x)$ *имеет ограниченные частные производные первого порядка, а функция* $f(x)$*—ограниченные частные производные второго порядка. Тогда*

$$\lim_{\mu \to \infty} \sum_{\mu_n < \mu} c_n \left. \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} \right|_{x = x_0} = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right|_{x = x_0}, \quad (i = 1, 2), \quad (\mu_n^2 = \lambda_n). \tag{4}$$

Если условия дифференцируемости, наложенные на $q(x)$ *и* $f(x)$*, выполнены в некоторой замкнутой области* d*, целиком содержащейся внутри* D*, то равенство* (4) *имеет место равномерно в* d*.

Основными вспомогательными средствами в доказательстве этой теоремы являются тауберова теорема для интегралов Фурье и метод Б. М. Левитана.

Необходимо сделать некоторые замечания о принятых в работе обозначениях. Буквами x, ξ, η,... мы обозначаем точки двухмерного пространства с координатами (x_1, x_2) (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2),... . Через $x + \xi$ обозначается точка с координатами $(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2)$, через $|x|$ — расстояние точки x до начала координат, аналогично для $|\xi|$, $|\eta|$. Буквой C обозначается константа, не обязательно одна и та же.

2. Вывод вспомогательных формул. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\Delta u - q(x) u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{5}$$

$$u(x, o) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = f(x). \tag{6}$$

Если в уравнении (5) функция $q(x) \equiv 0$, то решение задачи (5)—(6) дается формулой (см. [3], стр. 158):

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{r < t} \frac{f(x + \xi)}{\sqrt{t^2 - r^2}} d\xi, \tag{7}$$

где $r = |\xi|$.

Рассмотрим неоднородную задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = g(x, t). \tag{8}$$

$$u(x, o) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

---

* В трехмерном случае теорема доказана Б. М. Левитаном [5].

Решение этой задачи дается формулой (см. ([3]), стр. 159):

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{g(x+\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\xi, \qquad (r = |\xi|). \tag{10}$$

Перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = -q(x) u. \tag{1'}$$

Рассматривая в последнем уравнении правую часть как известную функцию и применяя формулы (7) и (10), получим следующее интегральное уравнение, которое эквивалентно задаче (1)—(2):

$$u(x, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{q(x+\xi) u(x+\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\xi. \tag{11}$$

Пусть $u_0(x, t)$ определяется по формуле (7) и пусть

$$u_n(x, t) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{r<\tau} \frac{q(x+\xi) u_{n-1}(x+\xi, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} d\xi. \tag{12}$$

Тогда

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + \ldots = u_0(x, t) + v(x, t) \tag{13}$$

есть решение задачи (1)—(2). Легко видеть, что решение $\tilde{u}(x, t)$ задачи:

$$\Delta\tilde{u} - q(x)\tilde{u} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \tag{1'}$$

$$\tilde{u}(x, o) = f(x), \quad \left.\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{2'}$$

дается в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \tag{14}$$

В дальнейшем нам понадобится оценка для

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2)$$

при $t \to 0$ в предположении, что $f(x)$ в окрестности точки x имеет ограниченные частные производные первого и второго порядков, а $q(x)$—ограниченные частные производные первого порядка. Мы имеем, в силу (14),

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, t)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u_0(x, t)}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i \partial t}.$$

Далее, из формулы (7) следует

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x_i \partial t} = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{r<1} \frac{\partial f(x+t\eta)}{\partial x_i}\cdot\frac{d\eta}{\sqrt{1-r^2}} +$$

$$+\frac{t}{2\pi}\iint\limits_{r<1}\sum_{j=1}^{2}\eta_j\,\frac{\partial^2 f(x+t\eta)}{\partial x_i \partial x_j}\cdot\frac{d\eta}{\sqrt{1-r^2}}. \qquad (15)$$

Так как по условию $\partial f/\partial x_i$ имеют ограниченные первые частные производные, то из теоремы о конечном приращении следует, что при $t\to 0$

$$\frac{\partial f(x+t\eta)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + O(t).$$

Отсюда и из (15) следует

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x_i \partial t} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \varphi(x,t), \qquad (16)$$

причем при $t\to o$

$$\varphi(x,t) = O(t).$$

Далее, из определения функции $v(x,t)$, формул (12) и (16) следует, что при $t\to o$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} = O(t^3). \qquad (17)$$

Из формулы (14) и оценок (16) и (17) следует важная в дальнейшем оценка

$$\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \psi(x,t), \qquad (18)$$

причем при $t\to o$

$$\psi(x,t) = O(t).$$

3. Доказательство теоремы. В настоящем пункте, используя результаты предыдущего пункта, мы докажем теорему, сформулированную в первом пункте. Пусть функции $f(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Обозначим через $\{c_n\}$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$ относительно системы собственных функций задачи (1)—(2). Пусть x внутренняя точка области D и ε настолько мал, что сфера с центром в точке x и радиуса ε целиком лежит внутри D. Решая задачу Коши (1)—(2′) для $t\leq\varepsilon$ вначале по формуле (14), а затем по методу Фурье и приравнивая эти два решения, получим

$$\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\cos\mu_n t, \qquad (19)$$

причем функции $u_0(x,t)$ и $v(x,t)$ определены по формулам (7) и (13). Пусть функция $g_\varepsilon(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $g_\varepsilon(t) = g_\varepsilon(-t)$, т. е. чётна.

2. $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$,

3. $g_\varepsilon(t)$ имеет непрерывную производную.

Помножим обе части тождества (19) на $g_\varepsilon(t)$ и интегрируем по t от 0 до ε. Тогда получим

$$\int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu S(x, \mu) = \int_0^\varepsilon \left[\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}\right] g_\varepsilon(t)\, dt. \qquad (20)$$

где

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^\mu g_\varepsilon(t) \cos \mu t\, dt, \quad S(x, \mu) = \sum_{\mu_n < \mu} c_n \varphi_n(x). \qquad (21)$$

Так как по предположению функции $f(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то справедливо равенство (18) и, следовательно, тождество (20) после дифференцирования по x_i может быть записано в виде:

$$\int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \int_0^\varepsilon g_\varepsilon(t)\, dt + \int_0^\varepsilon \psi(x, t)\, g_\varepsilon(t)\, dt. \qquad (22)$$

Так как

$$g_\varepsilon(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu) \cos \mu t\, d\mu,$$

то

$$\int_0^1 g_\varepsilon(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu) \frac{\sin \mu}{\mu}\, d\mu. \qquad (23)$$

Далее, из равенства Парсеваля следует, что

$$\int_0^1 \psi(x, t)\, g_\varepsilon(t)\, dt = \int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu \beta_1(x, \mu). \qquad (24)$$

где

$$\beta_1(x, \mu) = \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \beta(x, \nu)\, d\nu, \quad \beta(x, \nu) = \int_0^1 \psi(x, t) \cos \nu t\, dt. \qquad (25)$$

Пользуясь (23) и (24), можно (22) записать в виде

$$\int_0^\infty \psi_\varepsilon(\mu)\, d_\mu R(x, \mu) = 0 \qquad (0 < \varepsilon < 1). \qquad (26)$$

где

$$R(x, \mu) = \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\mu \frac{\sin \nu}{\nu}\, d\nu - \beta_1(x, \mu). \qquad (27)$$

По условию $L(f) = \Delta f - q(x) f \subset L_2(D)$ и $f(x)$ удовлетворяет условию (2). Тогда, применяя тождество Грина, мы получим

$$c_n = \frac{d_n}{\mu_n^2},$$

где

$$d_n = \int\limits_{(D)} L(f) \varphi_n(x)\, dx.$$

Далее, справедлива следующая лемма, доказательство которой мы не приводим:

Лемма. Пусть d подобласть области D, содержащейся строго внутри D. Существует константа $C = C(d)$ такая, что для $a \to \infty$ и $x \in d$ справедлива оценка

$$\sum_{a \leqslant \mu_n < a+1} \left[\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} \right]^2 < Ca^3.$$

Мы имеем

$$\overset{a+1}{\underset{a}{V}} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x_i} \right\} = \sum_{a \leqslant \mu_n < a+1} |c_n| \left| \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} \right| \leqslant \frac{1}{a^2} \sum_{a \leqslant \mu_n < a+1} |d_n| \left| \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i} \right|.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, в силу леммы отсюда получим

$$\overset{a+1}{\underset{a}{V}} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x_i} \right\} = o(1), \quad (i = 1, 2). \tag{28}$$

Тогда из (25), (28) и (27) следует оценка

$$\overset{a+1}{\underset{a}{V}} \{ R(x, \mu) \} = o(1).$$

Поэтому из теоремы 1.4.2 работы [4] следует, что

$$\lim_{\mu \to \infty} R(x, \mu) = 0. \tag{29}$$

Далее,

$$\lim_{\mu \to \infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\mu} \frac{\sin \nu}{\nu} d\nu = 1. \tag{30}$$

Покажем, что

$$\lim_{\mu \to \infty} \beta_1(x, \mu) = 0. \tag{31}$$

В самом деле,

$$\beta_1(x, \mu) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \psi(x, t) \frac{\sin \mu t}{t} dt. \tag{32}$$

Равенство (31) следует из (32) в силу леммы Римана—Лебега на основании (18).

Из равенств (27), (30) и (31) следует

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \qquad (i = 1, 2)$$

в каждой точке x, в окрестности которой функции $f(x)$ и $q(x)$ удовлетворяют условиям теоремы. Теорема доказана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Ըստ Շրեդինգերի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների դիֆերենցված վերլուծության զուգամիտությունը հարթության վրա

Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\Delta u + \{\lambda - q(x)\} u = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

որտեղ $q(x)$ ֆունկցիան հարթության D վերջավոր տիրույթում որոշված անընդհատ իրական ֆունկցիա է, իսկ Γ-ն D տիրույթի եզրագիծն է։ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ նշանակենք (1)—(2) խնդրի սեփական արժեքները, իսկ $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$—համապատասխան սեփական ֆունկցիաները։

Դիցուք $f(x) \subset L_2(D)$։ Նշանակենք

$$c_n = \int_{(D)} f(x)\, \varphi_n(x)\, dx.$$

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան D տիրույթում ունի երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներ, ըստ որում $\Delta f - q(x) f \subset L_2(D)$, և բավարարում է (2) պայմանին։ Ենթադրենք D տիրույթի ներքին x_0 կետի շրջակայքում $q(x)$ ֆունկցիան ունի սահմանափակ առաջին կարգի մասնական ածանցյալներ, իսկ $f(x)$-ը՝ սահմանափակ երկրորդ կարգի մասնական ածանցյալներ։ Այդ դեպքում

$$\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\mu_n < \mu} c_n \left.\frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x_i}\right|_{x = x_0} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right|_{x = x_0}, \quad (i = 1, 2), \quad (\mu_n^2 = \lambda_n). \tag{3}$$

Եթե $f(x)$ և $q(x)$ ֆունկցիաների վրա դրված դիֆերենցելիության պայմանները բավարարում են ամբողջովին D-ին պատկանող d փակ տիրույթում, ապա (3) հավասարությունը տեղի ունի d-ում հավասարաչափ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. М. Левитан*, Математический сборник, том 39 (81):1, 37—50 (1956). [2] *И. С. Саргсян*, Известия АН СССР, серия математ., том 21, 263—282 (1957). [3] *Р. Курант* и *Д. Гильберт*, Методы математической физики, том II, М.-Л., Гостехиздат, 1951. [4] *Б. М. Левитан*, Математический сборник, том 35 (77):2, 267—316 (1954). [5] *Б. М. Левитан*, Математический сборник (1957). (в печати).