

МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл.-корр. АН Армянской ССР

К теории подобия

(Представлено 15.V.1957)

Теория подобия и анализ размерностей получили в текущем столетии существенное развитие ⁽¹⁾. Значительный вклад в эти методы исследования сделан советскими учеными ^(2, 3, 4).

В настоящей заметке мы хотим показать, что для некоторых частных случаев физических полей можно пользоваться, при установлении критериев подобия, приемом, основанным на прямом сопоставлении элементов подобных систем. Прием этот в общем сводится к следующему. Данное физическое поле характеризуется рядом величин. Некоторая группа этих величин может быть принята за исходную независимую систему, остальные же величины могут быть выражены через эту систему. Исходную систему желательно подобрать таким образом, чтобы в нее входили величины отвлеченные, а также величины, зависящие от масштабов подобия в первой степени. Физические поля A и A' , подобие которых исследуется, разбиваются на элементарные части системой координатных поверхностей, подобно расположенных. В результате получают элементарные, подобно расположенные участки физических полей и совершается их сопоставление в отношении исходной системы величин во всей области, занятой данным полем, включая границы. Поэтому граничные условия должны быть такими, чтобы состояния элементарных участков полей, прилегающих вдоль границ, не представляли собою каких-либо особенностей в сравнении с состоянием элементарных участков, расположенных полностью внутри поля. Предлагаемый способ установления подобия имеет тот недостаток, что он не обладает, по-видимому, общностью и применим лишь для частных случаев полей. Достоинствами этого способа, по нашему мнению, являются его простота и наглядность получаемых с помощью него результатов.

В качестве примера рассмотрим условия подобия твердых деформируемых тел, причем ограничимся, для начала, изучением простого механического подобия, определяемого нами следующим образом:

- 1) тела A и A' геометрически подобны;

2) в сходственных точках тел A и A' зависимость между тензорами напряжений и деформаций одинакова;

3) плотности тел A и A' , т. е. массы, отнесенные к единице объема, в сходственных точках совпадают.

Из пункта 2 определения следует, что прочности тел в их сходственных точках также одинаковы. В дальнейшем, для сокращения, тела A и A' , подчиняющиеся условиям простого механического подобия, будем просто называть подобными телами. Приведенные выше условия допускают к рассмотрению подобных тел при самых разнообразных свойствах их материала. Тела эти могут быть упругими, упруго-пластическими, хрупкими, однородными, неоднородными, изотропными и анизотропными, лишь бы в их сходственных точках выполнялись условия 2 и 3. За основные физические величины, подлежащие сравнению, мы принимаем деформации и напряжения.

Докажем следующую теорему.

Если к сходственным точкам поверхностей подобных тел A и A' приложены распределенные поверхностные силы равной напряженности, то во всех сходственных точках обоих тел совпадают напряжения и деформации. (Подобные тела A и A' находятся в подобном состоянии). Эта теорема в применении к упругим телам, следующим закону Гука, доказана В. Л. Кирпичевым ⁽⁵⁾. Она применялась также при изучении подобия пластически деформируемых тел ⁽⁶⁾.

Рассмотрим два подобных тела A и A' , причем размеры тела A' отличаются в α раз от сходственных размеров тела A (α —множитель геометрического подобия).

Рассечем мысленно тело A системой плоскостей, параллельных плоскостям координат, на элементарные прямоугольные параллелепипеды со сторонами Δx , Δy и Δz . Каждое из этих элементарных тел будет находиться в состоянии равновесия под действием напряжений, приложенных к их граням.

У поверхности тела A , в общем случае, будут вырезаны элементарные тела неправильной формы (точнее элементарные прямоугольные параллелепипеды с ущербами в той или иной степени). Эти тела занимают малую толщину вдоль поверхности тела A , которую можно сделать сколь угодно малой соответственным подбором величин Δx , Δy и Δz . Поэтому их можно вовсе исключить из рассмотрения, передав внешнюю нагрузку на ближайший к поверхности слой целых элементарных прямоугольных параллелепипедов.

Все стороны Δx , Δy и Δz полученных элементарных прямоугольных параллелепипедов умножим на α . Тогда получим новые элементарные прямоугольные параллелепипеды со сторонами $\Delta x' = \alpha \Delta x$, $\Delta y' = \alpha \Delta y$ и $\Delta z' = \alpha \Delta z$. Для полученных новых элементарных тел компоненты напряжений и деформаций, как известно, не изменяются. Если теперь мы соберем эти элементарные тела ($\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$) в том же порядке, как располагаются элементарные тела (Δx , Δy , Δz) в теле A , получим тело A' подобное телу A , причем на поверхности тела A' действуют поверхностные силы той же напряженности, что и на тело A , а в

сходственных точках тел A и A' напряжения и деформации совпадают, что и требовалось установить.

Эту теорему можно расширить, введя в рассмотрение объемные силы. Объемные силы в теле A могут быть заменены поверхностными силами, распределенными по плоскостям $z_i = \text{const}$, причем $z_i = z_{i-1} + \Delta z$. Тогда, на основании только что доказанного, такие же поверхностные силы должны быть приложены к сходственным поверхностям $z'_i = z'_{i-1} + \Delta z'$ тела A' , для обеспечения равенства напряжений и деформаций в подобных телах A и A' . Поскольку $\Delta z' = \alpha \Delta z$, то, переходя к пределу, при $\Delta z \rightarrow 0$, найдем, что для обеспечения подобия состояний тел A и A' на них должны действовать объемные силы, соответственно равные Ω и $\Omega' = \frac{1}{\alpha} \Omega$.

Теперь не трудно установить, что при выполнении изложенных выше условий о распределении поверхностных и объемных сил и одинаковых способах закрепления тел A и A' смещения сходственных точек тел A и A' должны относиться как их линейные размеры. Таким образом тела A и A' остаются геометрически подобными и в процессе деформации.

До настоящего момента мы рассматривали лишь распределенные силы по поверхности тел A и A' . Нетрудно путем элементарных предельных переходов установить, что погонные силы q и q' , сосредоточенные силы P и P' , моменты M и M' , приложенные к сходственным линиям и точкам поверхностей тел A и A' , должны быть подчинены условиям:

$$q' = \alpha q, P' = \alpha^2 P, M' = \alpha^3 M$$

для обеспечения подобия состояний подобных тел A и A' .

Приведем некоторые следствия этой теоремы.

1. Если тело A имеет начальные напряжения, то точно такие же начальные напряжения должны быть в теле A' (для подобия).

2. Масштабы времен для тел A и A' при деформации ползучести одинаковы, т. е. деформации протекают с одинаковой скоростью.

3. Внешние силы, приложенные к телам A и A' , должны меняться с одинаковой скоростью.

4. Градиенты компонентов напряжений и деформаций обратно пропорциональны их линейным размерам.

5. Если граничные условия для тела A заданы в смещениях $\bar{w}$ точек поверхности, то для обеспечения в подобном теле подобия состояния с телом A необходимо сообщить сходственным точкам поверхности тела A' смещения $\bar{w}' = \alpha \bar{w}$, т. е. пропорционально линейным размерам тел.

6. Если два тела A и B в общем случае с различными механическими свойствами скреплены по некоторой поверхности Σ таким образом, что напряжения на этой поверхности являются функциями деформаций, а два соответственно подобных тела A' и B' при одинако-

вых α скреплены на сходственной поверхности Σ' таким образом, что напряжения на этой поверхности являются такими же функциями деформаций, что и в предыдущем случае, то полученные новые тела C и C' ($C = A + B$ и $C' = A' + B'$) являются подобными и на них распространяются все предыдущие выводы.

В отношении подобных хрупких тел A и A' , основываясь на сравнении их состояний, можно доказать следующую теорему: если в подобных телах A и A' , нагруженных в соответствии с условиями предыдущей теоремы, возникают трещины, то они подобно расположены, причем ширины раскрытия трещин в сходственных точках пропорциональны линейным размерам тел.

Перейдем к рассмотрению динамических процессов. Динамические процессы в двух подобных телах A и A' будем называть подобными, если в сходственных точках в сходственные моменты времени, напряжения и деформации, вызываемые этими процессами, одинаковы. В дальнейшем будем полагать также, что материалы подобных тел таковы, что их деформации не зависят от времени, т. е. такие явления как ползучесть или релаксация отсутствуют. При выполнении этого условия нетрудно заметить, что если к подобным „безынерционным“^{*} телам A и A' в сходственные моменты времен t и $t' = \tau t$ и в сходственных точках приложены переменные поверхностные силы одинаковой напряженности и переменные объемные силы, обратно пропорциональные линейным размерам тел, то динамические процессы в обоих телах подобны при любом масштабе времен τ .

Такой общности уже нет, если мы введем в рассмотрение и силы инерции. Легко показать, что в этом случае имеет место следующая теорема:

Если к подобным телам A и A' в сходственные моменты времени t и $t' = \tau t$ и в сходственных точках приложены переменные поверхностные силы одинаковой напряженности и переменные объемные силы, обратно пропорциональные линейным размерам тел, то динамические процессы в обеих системах подобны при условии $\tau = \alpha$, т. е. множители подобия для времен и длин совпадают (или иначе — длительности динамических процессов в телах A и A' пропорциональны их линейным размерам).

Некоторые результаты, полученные здесь, известны, но читатель мог заметить, что они носят более общий и, вместе с тем, более наглядный характер.

Полученные выше выводы легко расширить, если ввести в рассмотрение определение расширенного механического подобия твердых деформируемых тел.

Два тела называем механически подобными в расширенном смысле, при выполнении следующих условий:

1. Тела A и A' геометрически подобны.

^{*} Точнее — если силами инерции можно пренебречь.

2. Если для материала тела A имеется заданная функциональная зависимость между тензорами напряжений и деформаций, то для материала тела A' должна быть такая же функциональная зависимость, но аффинно преобразованная относительно оси времен и тензоров напряжений и деформаций*. Для определенности будем считать, что $t' = \eta t$, $\sigma' = \beta \sigma$ и $e' = \gamma e$, где t , σ и e время, напряжение и деформация для тела A , а t' , σ' и e' соответствующие величины для тела A' .

Из этого определения естественно вытекает, что в сходственных точках прочность материала тела A' отличается в β раз от прочности материала тела A .

Применяя способ сравнения элементов тел A и A' и соответственным образом преобразовывая элементы тела A , придем к следующей основной теореме.

Если к двум подобным, в расширенном смысле, телам A и A' , одинаковым способом закрепленным, приложены в сходственных точках в сходственные моменты времен t и $t' = \eta t$ поверхностные силы напряженностью σ и $\sigma' = \beta \sigma$ и объемные силы интенсивностью Ω и $\Omega' = \frac{\beta}{\alpha} \Omega$, то в сходственных точках обоих тел в сходственные моменты времен напряжения равны σ и $\sigma' = \beta \sigma$, деформации равны e и $e' = \gamma e$, смещения равны $\bar{w}$ и $\bar{w}' = \alpha \gamma \bar{w}$.

Для динамических же процессов имеет место следующая основная теорема (при условии отсутствия деформаций ползучести).

Если к подобным, в расширенном смысле, телам A и A' , одинаковым образом закрепленным, обладающим соответственно плотностями ρ и ρ' , в сходственные моменты времени t и $t' = \tau t$ приложить поверхностные силы, напряженность коих соответственно равна σ и $\sigma' = \beta \sigma$ и объемные силы, интенсивность коих Ω и $\Omega' = \frac{\beta}{\alpha} \Omega$, то при

$\tau = \alpha \sqrt{\frac{\rho'}{\rho} \frac{\gamma}{\beta}}$ в сходственные моменты времен и в сходственных точках обоих тел напряжения равны σ и $\sigma' = \beta \sigma$, деформации равны e и $e' = \gamma e$, смещения равны $\bar{w}$ и $\bar{w}' = \alpha \gamma \bar{w}$, т. е. имеет место динамическое подобие.

Как следует из последнего, различные физические величины — линейные размеры тел и смещения их точек, имеющие одинаковую размерность, оказываются с различными масштабами α и $\alpha\gamma$, что также считаем достоинством предлагаемого способа рассмотрения подобия.

В последующем предполагаем подробнее остановиться на этих вопросах в „Известиях. АН Армянской ССР“ (серия технических наук) в связи с задачами моделирования конструкций, решением

* На возможность толкования подобных преобразований как аффинных, по-видимому, впервые указал Эйгенсон (7). Оно им не было реализовано в том смысле, как это предлагается здесь.

некоторых задач инженерной сейсмологии и вопросами моделирования геотектонических процессов.

Институт стройматериалов и сооружений
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Նմանության տեսության շուրջը

Անխառնության մեջ զարգացված է նմանության տեսությանը վերաբերող մասնավոր խնդրի լուծման մի եղանակ: Յուրյց է տրված, որ ֆիզիկական դաշտերի մի քանի մասնավոր դեպքերում, նմանության չափանիշի հաստատման միջոցով հնարավոր է սեղ-դակի զուգադրում կատարել համակարգության էլեմենտների միջև:

Եղանակը հիմնականում հանդում է հետևյալին. տվյալ ֆիզիկական դաշտը բնութագրվում է մի շարք մեծություններով, որոնցից մի որոշակի խումբը կարելի է ընդունել որպես ելակետային անկախ համակարգություն, իսկ մյուս մեծությունները կարող են արտահայտվել այդ համակարգության միջոցով: Մեծություններից այս վերջինները ցանկալի է ընտրել այնպես, որպեսզի նրանց մեջ մտնեն վերացական, ինչպես և նմանության մասշտաբների առաջին աստիճանից կախված մեծություններ: A և A' ֆիզիկական դաշտերը, որոնց նմանությունը ուսումնասիրվում է կոորդինատային մակերեսների համակարգությամբ, բաժանվում են նման դասավորության տարրական տեղամասերի: Բաժանման հետևանքով ստացված նման դասավորության էլեմենտների ֆիզիկական դաշտերի տեղամասերը զուգադրվում են ելակետային համակարգության դաշտերի բոլոր տեսակի մեծությունների հետ, ընդհուպ մինչև տվյալ դաշտի սահմանային մասը: Այստեղից երևում է, որ դաշտի սահմանային պայմանները պետք է լինեն այնպիսին, որպեսզի դաշտի սահմանին կից վերջինիս տարրական տեղամասերը դնվեն դաշտի ներսում՝ սահմանից հեռու տեղավորված տեղամասերի վիճակում:

Նմանության հաստատման առաջարկվող եղանակն ունի այն թերությունը, որ նա ըստ երևույթին, ընդհանրություն չունի և կիրառելի է միայն ֆիզիկական դաշտերի մասնավոր դեպքի համար: Մեր կարծիքով այս եղանակի առավելությունն այն է, որ նա պարզ է և նրա միջոցով ստացված արդյունքներն ակնառու են:

Հոգիածում որպես օրինակ դիտված են պարզ մեխանիկական նմանություն ունեցող սլինդ և փխրուն դեֆորմացիայի ենթարկվող մարմինները: Ապացուցված են նմանության տեսության երկու թեորեմներ բերված որոշակի հետեություններով հանդերձ, որոնք տարածվում են այդ մարմինների, ինչպես և ճկուն, ճկուն-սլլաստիկ, համասեռ, անհամասեռ, իզոտրոպ և անիզոտրոպ մարմինների վրա, եթե իհարկե, պահպանվում է ընդունված պայմաններից 2 և 3 կետերը:

A և A' մարմինների նման կետերում լարվածության և դեֆորմացիաների տենզորների միջև եղած կապը միանման է:

A և A' մարմինների խտությունը այսինքն՝, միավոր ծավալին վերադրված մաս-սաները նման կետերում համընկնում են:

Հոգիածում նման մարմիններում ստատիկական երևույթներից զատ զիջվում են նաև A և A' նման մարմիններում եղած դինամիկական պրոցեսները:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՆՍՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ П. В. Бриджмен, Анализ размерностей, ОНТИ, ГТТИ, Л.-М., 1934. ² М. В. Кирпичев и П. К. Конаков, Математические основы теории подобия, изд. АН СССР, М.-Л., 1949. ³ Сб. Теория подобия и моделирование, изд. АН СССР, М., 1951. ⁴ А. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, ГТТИ, М., 1954. ⁵ В. Л. Кирпичев, О подобии при упругих явлениях. Собр. соч., том I, изд. Совета Петроградского Политехнического Ин-та, Петроград, 1917. ⁶ А. А. Ильюшин, ПММ., т. XVI, 1952. ⁷ Л. С. Эйгенсон, Моделирование, Промстройиздат, М., 1949.