ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXV 1957 3

МАТЕМАТИКА

С. Е. Карапетян

Линейные комплексы развертывающихся поверхностей конгруэнций

(Представлено М. М. Джрбашяном 7.VII.1957)

1. В настоящей работе с лучом конгруэнции однозначно связываются два линейных комплекса, каждый из которых проходит через пять бесконечно-близких лучей одной развертывающейся поверхности конгруэнции, и рассматриваются некоторые вопросы, связанные с этими комплексами. В работе применен метод внешних форм Картана (1).

2. Инфинитезимальное перемещение свободного точечного репера $A_1A_2A_3A_4$ в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dA_i = \omega_i^k A_k, \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{1}$$

где ω_i^k — линейные дифференциальные формы, связанные структурными уравнениями проективного пространства:

$$D\omega_i^k = [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k]. \tag{2}$$

Семейство реперов первого порядка (2), присоединенное к конгруэнции, определяется дифференциальными уравнениями

$$\omega_1^4 = 0, \qquad \omega_2^3 = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя внешним образом эту систему (с помощью (2)) и раскрывая по лемме Картана (1), получим

$$\begin{aligned} \omega_3^4 &= \alpha\omega_1^3 - \beta\omega_2^4, & \omega_2^1 &= \gamma'\omega_1^3 + \beta'\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= \beta\omega_1^3 + \gamma\omega_2^4, & \omega_4^3 &= -\beta'\omega_1^3 + \alpha'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{4}$$

После повторения два раза этого шага мы получим систему линейных уравнений (см. (2), §§ 185—187):

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha_1\omega_1^3 - \beta_1\omega_2^4, & \Delta\gamma' &= \gamma_1'\omega_1^3 + \beta_1'\omega_2^4, \\ \Delta\beta &= \alpha\beta_1\omega_1^3 + \gamma\beta_2\omega_2^4, & \Delta\beta' &= \gamma'\beta_1'\omega_1^3 + \alpha'\beta_2'\omega_2^4, \\ \Delta\gamma &= \beta_2\omega_1^3 + \gamma_2\omega_2^4, & \Delta\alpha' &= -\beta_2'\omega_1^3 + \alpha_2'\omega_2^4, \\ \Delta\alpha_1 &= \alpha_{11}\omega_1^3 - \beta_{11}\omega_2^4, & \Delta\alpha_2' &= -\beta_{22}'\omega_1^3 + \alpha_{22}'\omega_2^4, \\ \Delta\gamma_2 &= \beta_{22}\omega_1^3 + \gamma_{22}\omega_2^4 & \Delta\gamma_1' &= \gamma_{11}'\omega_1^3 + \beta_{11}'\omega_2^4. \end{aligned} \tag{5}$$

3. Пусть комплекс, проходящий через пять бесконечно-близких образующих развертывающейся поверхности $\omega_2^4 = 0$, изображается в пятимерном проективном пространстве P_5 точкой

$$A = a^{ik}\,|ik|, \qquad i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{6}$$

где $|i,\ k|$ есть аналитическая прямая $(A_i A_k)$ и a^{ik} — координаты комплекса.

Согласно условию, точка A полярно сопряжена с точками $|12|$ $d\,|12|$, $d^2\,|12|$, $d^3\,|12|$ и $d^4\,|12|$ (по $mod\,\omega_2^4$) относительно гиперквадрики Q_4^2, т. е. комплекс A должен удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} &\{A\,|12|\} = 0, \qquad \{Ad\,|12|\} = 0, \qquad \{Ad^2\,|12|\} = 0, \\ &\{Ad^3\,|12|\} = 0 \qquad \{Ad^4\,|12|\} = 0, \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_2^4), \end{aligned} \tag{7}$$

где фигурная скобка означает плюккерово произведение [2].

Из уравнений (1), (3), (4) и (5), найдя $d\,|12|$, $d^2\,|12|$, $d^3\,|12|$ и $d^4\,|12|$ и вставляя в уравнение (7), для комплекса A получим выражение:

$$A = \left\{ \alpha_{11} - \gamma_{11}' + \frac{\gamma_1'^2 - \alpha_1^2}{2} + 3\,(\alpha\beta' + \beta\gamma') + \beta_2'^2 - \beta_2^2 \right\} |12| +$$

$$+ (\alpha_1 - \gamma_1')\ |23| + 2\gamma'\ |13| + 2\alpha\ |42|.$$

Проделывая те же выкладки для развертывающейся поверхности $\omega_1^3 = 0$, мы получим второй комплекс, который обозначим через A':

$$A' = \left\{ \alpha_{22}' - \gamma_{22} + \frac{\gamma_2^2 - \alpha_2'^2}{2} + 3\,(\alpha'\beta + \beta'\gamma) + \beta_1^2 - \beta_1'^2 \right\} |12| -$$

$$- (\alpha_2' - \gamma_2)\ |14| + 2\alpha'\ |13| + 2\gamma\,|42|.$$

Комплексы A и A' инвариантны относительно преобразований внутри семейства тетраэдров 1-го порядка. Таким образом, с каждым лучом конгруэнции инвариантным образом связаны два линейных комплекса.

4. Пересечение этих двух комплексов дает линейную конгруэнцию, директрисы которой в пятимерном пространстве определяются точками

$$A + \lambda_i A',$$

где λ_i является корнями квадратного уравнения

$$4\,\alpha'\gamma\lambda^2 + \{ -(\alpha_1 - \gamma_1')\ (\alpha_2' - \gamma_2) + 4\ (\alpha\alpha' + \gamma\gamma') \}\ \lambda + 4\alpha\gamma' = 0. \tag{8}$$

Пусть $M_i\,(x_i^1,\ x_i^2,\ 0,\ 0)$ и $N_i\ (0,\ y_i^2,\ y_i^3,\ y_i^4)$, $i = 1,\ 2)$ две точки директрисы $A + \lambda_i A'$, тогда их координаты определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 - \gamma_i^1 = x_i^2 y_i^3, \qquad 2\,(\alpha + \lambda_i\gamma) = -\,y_i^4 x_i^2, \\ &2\,(\gamma' + \lambda_i\alpha') = x_i^1 y_i^3, \qquad \lambda_i\,(\alpha_2' - \gamma_2) = x_i^1 y_i^4, \end{aligned} \tag{9}$$

Если M_i не совпадает с фокусами A_1 или A_2, и N_i не находится на фокальных плоскостях, то они напишутся в виде

$$M_i = A_1 + \frac{2(\alpha + \lambda_i \gamma)}{\lambda_i(\alpha_2 - \gamma_2)} A_2, \quad m_i = \left(A_1, \ A_2, \ A_3 - \frac{\lambda_i(\alpha_2' - \gamma_2)}{2(\gamma' + \lambda_i \alpha')} A_1 \right).$$

Таким образом, будем иметь на каждом луче конгруэнции четыре точки M_1, M_2, A_1, A_2 (последние две точки—фокусы луча) и четыре плоскости, проходящие через этот луч, две из последних: m_1 и m_2 плоскости, проходящие через директрисы линейной конгруэнции, и две другие: a_1 и a_2—фокальные плоскости соответственно в фокусах A_1 и A_2.

5. Напишем сложное отношение этих четырех точек и четырех плоскостей

$$(A_1 A_2 M_1 M_2) = \frac{\lambda_2(\alpha + \lambda_1 \gamma)}{\lambda_1(\alpha + \lambda_2 \gamma)}, \quad (a_1 a_2 m_1 m_1) = \frac{\lambda_1(\gamma' + \lambda_2 \alpha')}{\lambda_2(\gamma' + \lambda_1 \alpha')}.$$

Рассмотрим два соотношения между этими двумя инвариантами.

а) Пусть $(A_1A_2M_1M_2)\cdot(a_1a_2m_1m_2) = 1$, тогда (если директрисы линейной конгруэнции не совпадают) получим $\alpha\alpha' - \gamma\gamma' = 0$, которое показывает, что конгруэнция (A_1A_2)—есть конгруэнция W. Итак, *сложное отношение этих четырех точек равно обратной величине сложного отношения четырех плоскостей тогда и только тогда, когда конгруэнция является конгруэнцией W.*

в) Пусть $(A_1A_2M_1M_2) = (a_1a_2m_1m_2)$, отсюда с помощью уравнения (8) получим $(\alpha_1 - \gamma_1')(\alpha_2' - \gamma_2) = 0$. Обращение в нуль одного из этих множителей означает, что одна директриса линейной конгруэнции находится на одной фокальной плоскости, а другая директриса проходит через другой фокус конгруэнции. Итак, *если одна директриса линейной конгруэнции проходит через один фокус луча A_1A_2, то другая директриса находится на фокальной плоскости другого фокуса, и наоборот.*

Если обе директрисы проходят через разные фокусы луча конгруэнции, то

$$\alpha_1 - \gamma_1' = 0, \qquad \alpha_2' - \gamma_2 = 0 \tag{10}$$

и комплексы A и A' напишутся в виде

$$a = (\alpha\beta' + \beta\gamma')\,[12] + \gamma'\,[13] + \alpha\,[42],$$
$$a' = (\alpha'\beta + \beta'\gamma)\,[12] + \alpha'\,[13] + \gamma\,[42].$$

Последние два комплекса впервые были найдены С. П. Финиковым ([2], стр. 373), когда он рассматривал инвариантные комплексы дифференциальной окрестности 2-го порядка конгруэнции.

Директрисы комплексов a и a' (для не—W-конгруэнции) пишутся в виде

$$l_2 = \beta\,[12] + [13], \quad l_1 = \beta'\,[12] + [42]$$

и совпадают со вторыми касательными фокальных сетей. Следовательно, *если обе директрисы проходят через разные фокусы луча, то они описывают две конгруэнции, полученные из данной конгруэнции преобразованием Лапласа.*

Конгруэнция, характеризующаяся уравнениями (10), определяется с произволом шести функций одного аргумента.

Система дифференциальных уравнений, определяющих эту конгруэнцию, имеет особое решение тогда, когда конгруэнция принадлежит линейному комплексу.

Доказывается, что два комплекса A и A' совпадают тогда и только тогда, когда конгруэнция принадлежит линейному комплексу (*с последним совпадают A и A'*).

Конгруэнции, у которых четыре точки $(A_1 A_2 M_1 M_2)$ составляют гармоническую четверку, определяются одной произвольной функцией от двух аргументов.

Другой класс конгруэнций с таким же произволом получим, если предположим, что четыре плоскости $(a_1 a_2 m_1 m_2)$ составляют гармоническую четверку.

Эти два класса конгруэнций характеризуются соответственно инвариантными уравнениями:

$$4(\gamma\gamma' - \alpha\alpha') + (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2' - \gamma_2) = 0,$$

$$4(\alpha\alpha' - \gamma\gamma') + (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2' - \gamma_2) = 0.$$

Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Ս. Ե. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

Կոնգրուենցիաների փակող մակերևույթների գծային կոմպլեքսները

Այս հոդվածում կոնգրուենցիայի յուրաքանչյուր ճառագայթին ինվարիանտ ձևով միացված են երկու գծային կոմպլեքսներ A և A', որոնցից յուրաքանչյուրն անցնում է կոնգրուենցիայի որևէ փակող մակերևույթի հինգ անվերջ մոտ ճառագայթներով: A և A' կոմպլեքսներն որոշում են գծային կոնգրուենցիա, որի դիրեկտրիսները հատում են կոնգրուենցիայի ճառագայթին երկու կետերում՝ M_1, M_2 և առաջացնում են այդ ճառագայթով անցնող երկու հարթություններ՝ m_1, m_2:

Եթե կոնգրուենցիայի ֆոկուսները նշանակենք A_1, A_2, իսկ նրանց համապատասխան ֆոկալ հարթությունները a_1, a_2, ապա տեղի ունեն հետևյալ թեորեմները.

1. $(A_1 A_2 M_1 M_2) \cdot (a_1 a_2 m_1 m_2) = 1$ հավասարումը բնութագրում է W կոնգրուենցիային:

2. Երբ այդ դիրեկտրիսներից մեկը անցնում է կոնգրուենցիայի մի ֆոկուսով, ապա մյուսը գտնվում է այդ ֆոկուսին չհամապատասխանող ֆոկալ հարթության վրա, և հակառակը:

3. Երբ այդ դիրեկտրիսները անցնում են կոնգրուենցիայի տարբեր ֆոկուսներով, ապա նրանք նկարագրում են Լապլասի երկու ձևափոխություններից առաջացած կոնգրուենցիայի ճառագայթները:

Այդպիսի կոնգրուենցիան բնութագրվում է (10) հավասարումներով:

4. Երկու կոմպլեքսները (A և A') համընկնում են այն, և միայն այն դեպքում, երբ կոնգրուենցիան պատկանում է գծային կոմպլեքսին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. П. Фиников.* Метод внешних форм Картана. М.-Л., 1948. [2] *С. П. Фиников.* Теория конгруэнций. М.-Л., 1950.