

МЕХАНИКА

М. А. Задоян

Об одной задаче предельного состояния бетонных блоков

(Представлено Н. Х. Арутюняном 22. I. 1957)

В нашей работе ⁽¹⁾ рассмотрено упруго-пластическое состояние прямоугольного бетонного блока, лежащего на сплошном упругом основании, при равномерном охлаждении и нагревании.

Значительный интерес представляет вопрос о перераспределении напряжения и наступлении предельного состояния блока от температурного воздействия после укладки второго блока над первым. Область этих задач весьма обширна и многообразна, поэтому здесь исследуются лишь некоторые случаи. Принимается, что укладка второго блока производится при сравнительно небольших значениях температуры, когда в первом блоке еще не успели появиться пластические деформации. Для определенности предполагаем, что размеры обоих блоков и свойства контактов одинаковы (последний может быть, в частности, когда одинаковы состав бетона и промежутки бетонирования). Будем исходить из теории идеально - пластического тела. Обозначим через σ_1 и σ_2 условные пределы текучести при одноосном растяжении и сжатии, а через τ_s — предельное значение касательного напряжения, возникающего в контактах. Для количественной иллюстрации будем принимать, в частности, что $\tau_s = \frac{1}{2} \sigma_1 = \frac{1}{16} \sigma_2$.

1°. *Прямоугольный блок.* После укладки второго блока на верхней грани первого блока возникают касательные напряжения (силы сцепления) $\tau(x)$. Они по величине равны соответствующим касательным напряжениям, действующим на основании первого блока, и имеют обратные направления. Верхний блок находится в таком же напряженном состоянии, как и отдельно стоящий блок. Поэтому для этого блока можно использовать результаты, полученные в вышеуказанной работе ⁽¹⁾. Уравнения равновесия нижнего блока при пренебрежении σ_y в случае охлаждения будут

$$\int_0^h \sigma_x(x, y) dy = 0,$$



$$\int_0^h \sigma_x(x, y) y dy + h \int_x^l \tau(x) dx = 0, \quad \int_0^h \tau_{xy}(x, y) dy = 0, \quad (1)$$

где h — высота, а $2l$ — длина блока.

Предполагается, что $\tau(x) = \tau_s \frac{T}{T_s} \frac{x}{l}$, $T \leq T_s$, причем T_s значение температуры, при которой на концах контакта $\tau(l) = \tau_s$. Величина T_s для данных размеров блока принимается известной.

Используя гипотезу плоских сечений и уравнения равновесия (1), для чисто-упругой стадии блока получим

$$\sigma_x(x, y) = \frac{3}{2} \frac{\tau_s}{m} \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) \left(1 - \frac{2y}{h}\right), \quad (2)$$

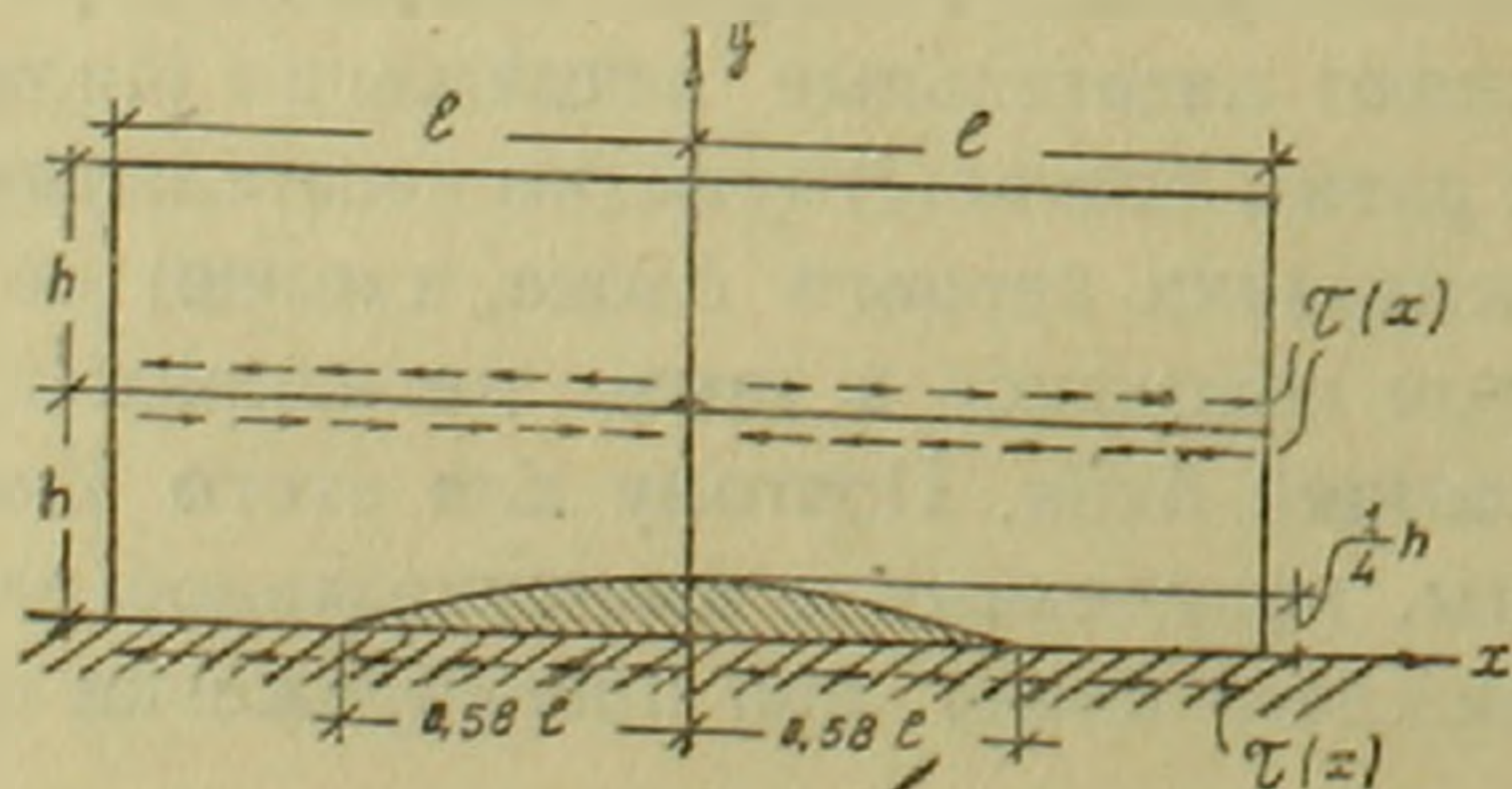
где $m = \frac{h}{2l}$. Из (2) следует, что первое в блоке, в нижнем крае сечения $x = 0$, возникает пластическое состояние от растяжения при температуре $T_1 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\tau_s} m T_s = \frac{4}{3} m T_s$. При увеличении T блок переходит в одностороннее упруго-пластическое состояние.

Исходя из гипотезы плоских сечений, уравнения равновесия (1) и условия $\sigma_x^e[x, \eta(x)] = \sigma_x^p[x, \eta(x)]$, $\eta(x_1) = 0$, где $\eta(x)$ ординаты точек указанной границы, а $2x_1$ длина пластической зоны, получим

$$\sigma_x(x, y) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 \leq y \leq \eta \\ \sigma_1 - \frac{2\sigma_1 h [y - \eta(x)]}{[h - \eta(x)]^2} & \text{при } \eta \leq y \leq h \end{cases} \quad (3)$$

$$\eta(x) = \frac{h}{2} \left[\frac{6\omega(x)}{\sigma_1 h} - 1 \right], \quad x_1 = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T}}, \quad (4)$$

причем $\omega(x) = \tau_s \frac{T}{T_s} \frac{l}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$. При $T = \frac{\sigma_1}{\tau_s} m T_s$, т. е. когда впервые в



Фиг. 1.

нижнем крае верхнего блока возникают пластические деформации (1), высота и длина пластической зоны нижнего блока суть (фиг. 1)

$$\eta(0) = \frac{1}{4} h, \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} l.$$

Из (3) следует, что в верхнем крае нижнего блока от сжатия впервые появятся пластические деформации при температуре:

$T_2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma_1}{\tau_s} \frac{3\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} m T_s \approx 3,41 m T_s$. В этой стадии высота и длина пластической зоны для нижнего блока будут (фиг. 2):

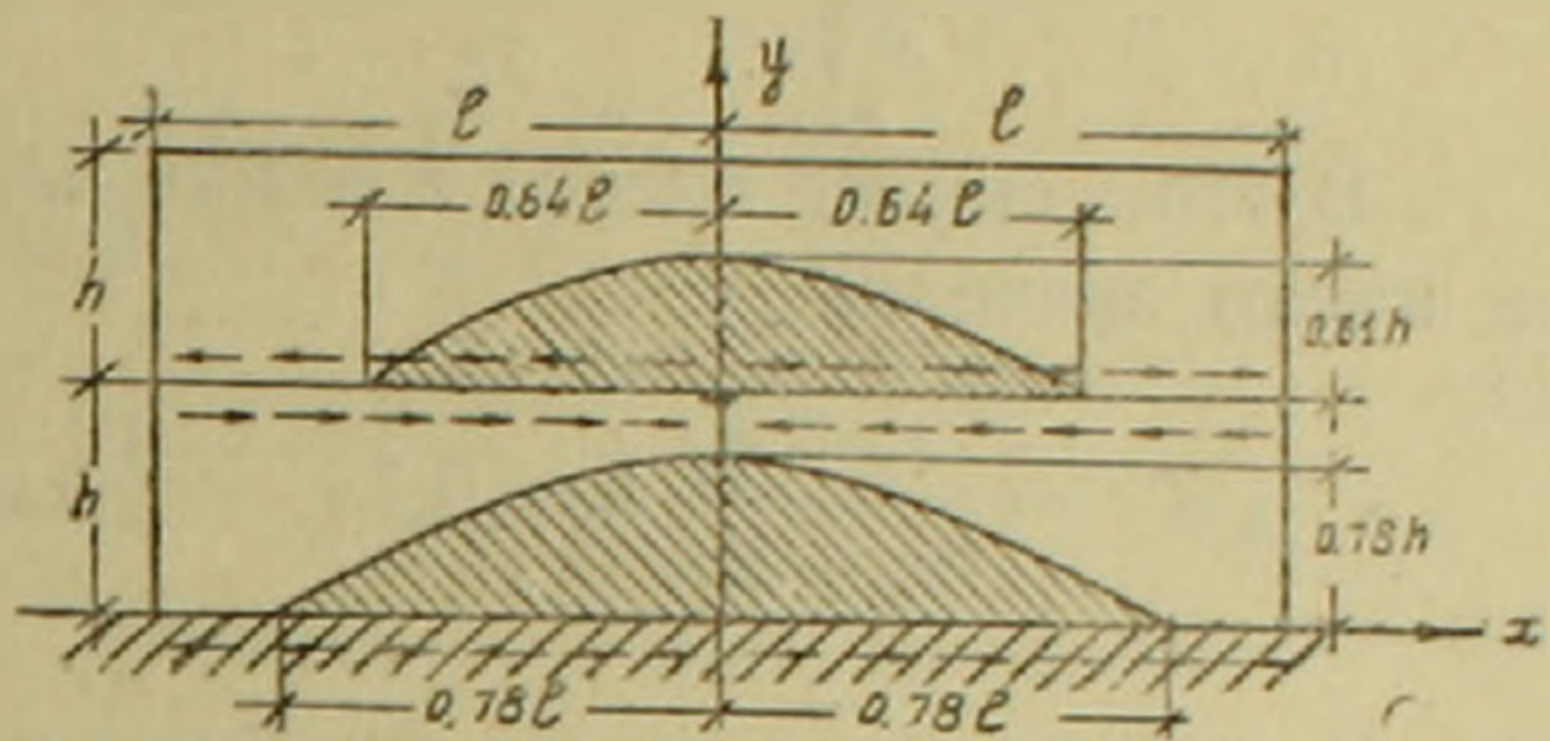
$$\eta(0) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} h \approx 0,78h,$$

$$x_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{3\sigma_2 - \sigma_1}} l \approx 0,78l$$

Соответствующие значения для верхнего блока получаем из (1):

$$\eta(0) = \frac{3\sigma_2 - 5\sigma_1}{3\sigma_2 + 7\sigma_1} h \approx 0,61h,$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{3\sigma_2 - 5\sigma_1}{3\sigma_2 - \sigma_1}} l \approx 0,64l.$$

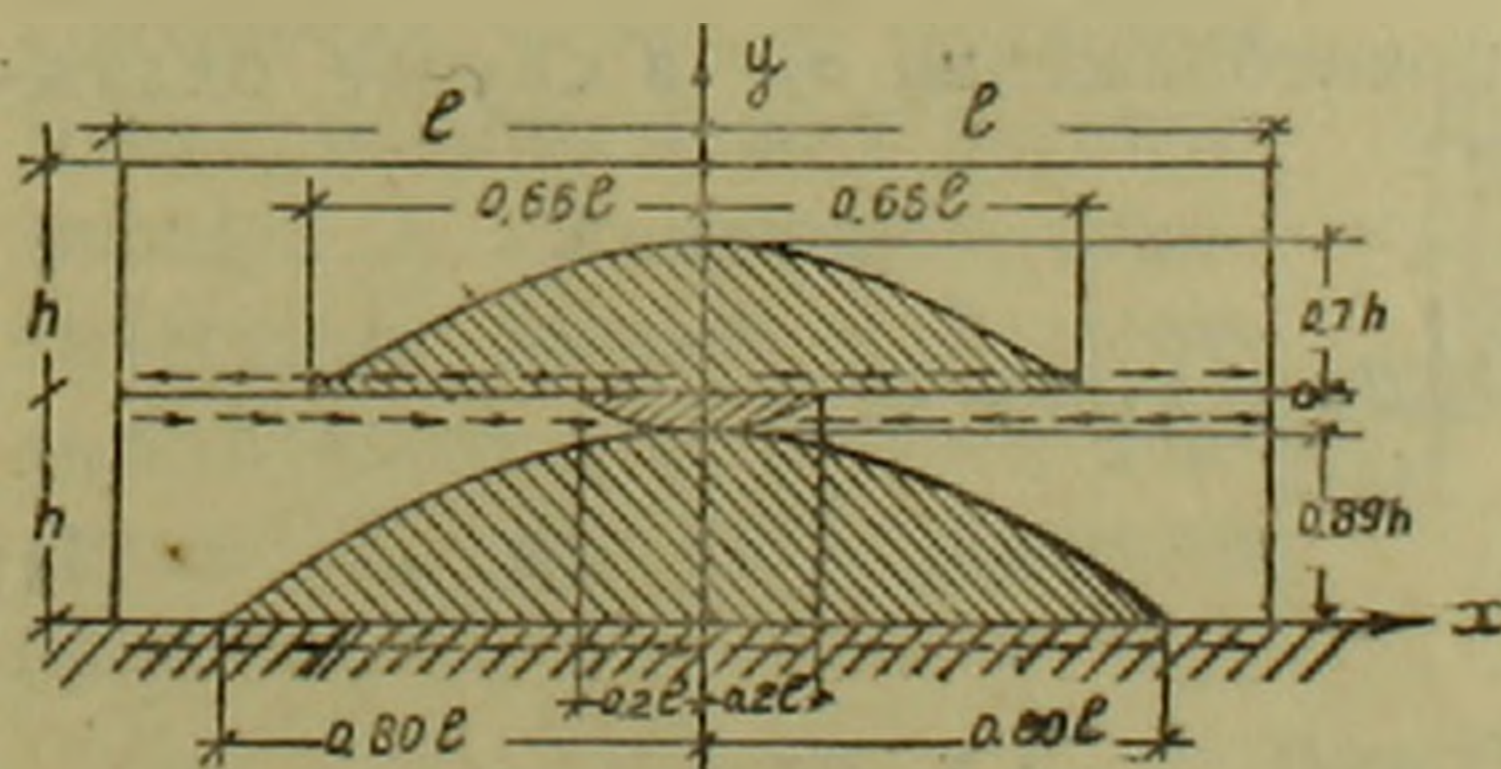


Фиг. 2.

При $T > T_2$ нижний блок переходит в двухстороннее упруго-пластическое состояние. На основании гипотезы плоских сечений, уравнения равновесия (1) и условий $\sigma_x^e[x, \eta_1(x)] = \sigma_x^p[x, \eta_1(x)]$, $\sigma_x^e[x, \eta_2(x)] = \sigma_x^p[x, \eta_2(x)]$, $\eta_2(x_2) = h$, где η_1 и η_2 ординаты точек границы соответственно растягивающей и сжимающей пластической зоны, $2x_2$ длина сжимающейся пластической зоны, для части нижнего блока $0 \leq |x| \leq |x_2|$ получаем

$$\sigma_x(x, y) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 \leq y \leq \eta_1 \\ \sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{y - \eta_1(x)}{\eta_2(x) - \eta_1(x)} & \text{при } \eta_1 \leq y \leq \eta_2 \\ -\sigma_2 & \text{при } \eta_2 \leq y \leq h \end{cases} \quad (5)$$

$$\left. \begin{matrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_2 \mp \sqrt{3} \sqrt{\sigma_1 \sigma_2 - \frac{2(\sigma_1 + \sigma_2)}{h} \omega(x)}}{\sigma_1 + \sigma_2} h, \quad (6)$$



Фиг. 3.

$$x_2 = l \sqrt{1 - \frac{T_2}{T}}, \quad (7)$$

$$T_2 \leq T \leq T_s$$

В предельном состоянии, т. е. когда поперечное сечение $x = 0$ целиком переходит в чисто-пластическое состояние, имеем (фиг. 3):

$$\eta_1^*(0) = \eta_2^*(0) = \eta^*(0) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} h \approx 0,89h, \quad (8)$$

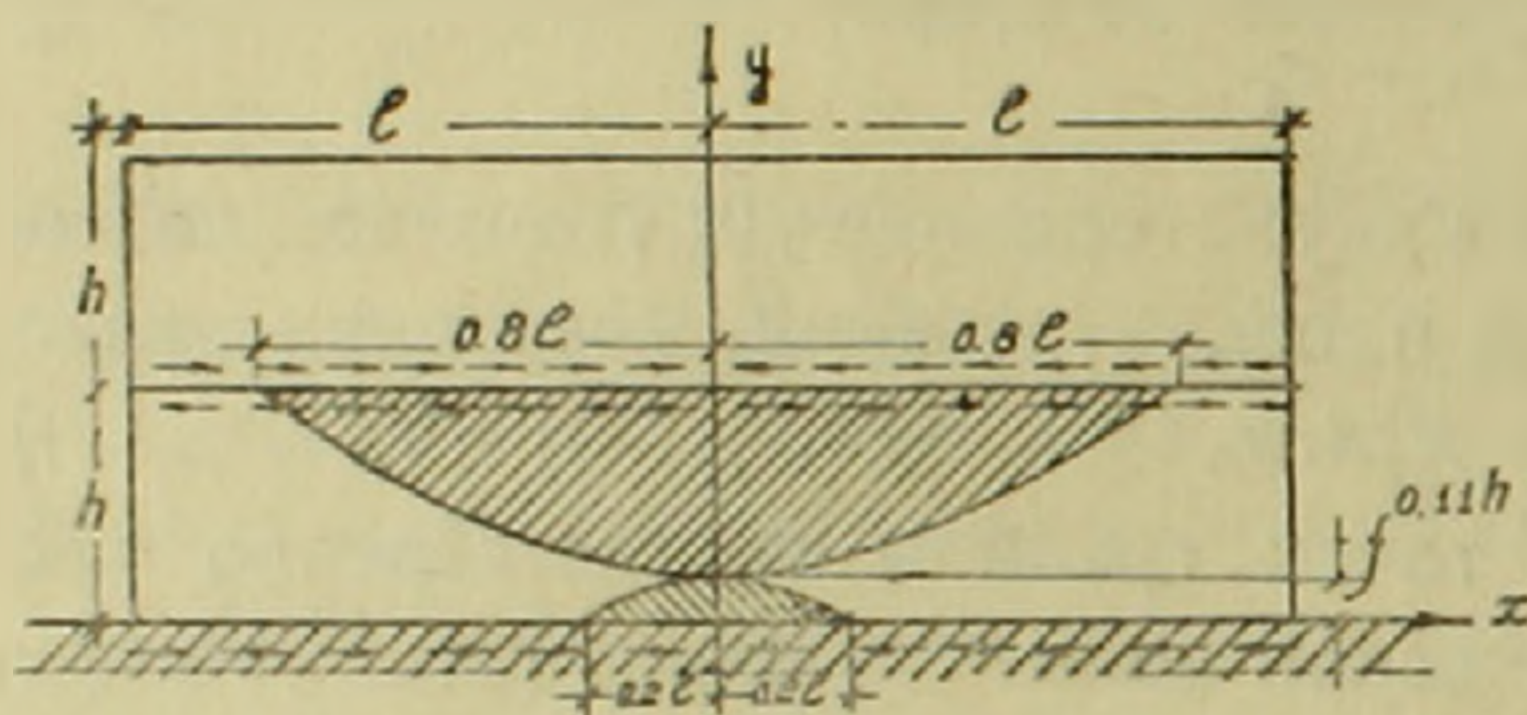
$$T_* = 2m T_s \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\tau_s (\sigma_1 + \sigma_2)} \approx 3,55m T_s, \quad (9)$$

$$x_1^* = \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \approx 0,8l; \quad x_2^* = \frac{l}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \approx 0,2l \quad (10)$$

В этой стадии высота и длина пластической зоны верхнего блока имеют значения

$$\eta(0) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} h = 0,7h, \quad x_1 = \frac{l}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \approx 0,66l.$$

Сравнивая полученные формулы с аналогичными результатами (1), заключаем, что при охлаждении нижний блок переходит в чисто-пластическое состояние, между тем как верхний блок еще находится в односторонней упруго-пластической стадии.



Фиг. 4.

Опуская для краткости аналогичные исследования при нагревании, отметим, что в этом случае в нижнем блоке возникает чисто-пластическое состояние до появления в какой-либо точке верхнего блока пластической деформации (фиг. 4).

2°. *Круглый блок.* а) *Предельное состояние круглого блока.* Пусть круглый бетонный блок радиусом $r = a$ и высотой $z = h$, лежащий на сплошном упругом основании, находится под воздействием равномерно распределенной температуры T . Ввиду разности механических свойств материала блока и основания в контакте появятся радиальные касательные напряжения (силы сцепления) $\tau(r)$, препятствующие свободным деформациям блока. Аналогично случаю прямоугольного блока будем принимать $\tau(r) = \tau_s \frac{T}{T_s} \frac{r}{a}$, при $0 \leq T \leq T_s$.

Уравнения равновесия (при пренебрежении σ_z) в случае охлаждения будут

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right] dz + \tau(r) = 0, \quad (11)$$

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right] z dz = 0, \quad \int_0^h \tau_{rz} dz = 0.$$

Имеем следующие граничные условия

$$\int_0^h \sigma_r(a, z) dz = \int_0^h \sigma_r(a, z) z dz = 0, \quad U(0, z) = \frac{\partial U(r, z)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (12)$$

где $U(r, z)$ — радиальное перемещение произвольной точки блока.

Исходя из гипотезы Кирхгофа для чисто-упругой стадии, из (11)—(12) получаем

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, z) &= \frac{3+\nu}{4} \frac{\tau_s}{m} \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{3z}{2h}\right), \\ \sigma_\theta(r, z) &= \frac{3+\nu}{4} \frac{\tau_s}{m} \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{3z}{2h}\right),\end{aligned}\quad (13)$$

где $m = \frac{h}{2a}$.

Условие постоянства максимальных касательных напряжений при пренебрежении τ_{rz} в нашем случае напишется в виде ^(2,3)

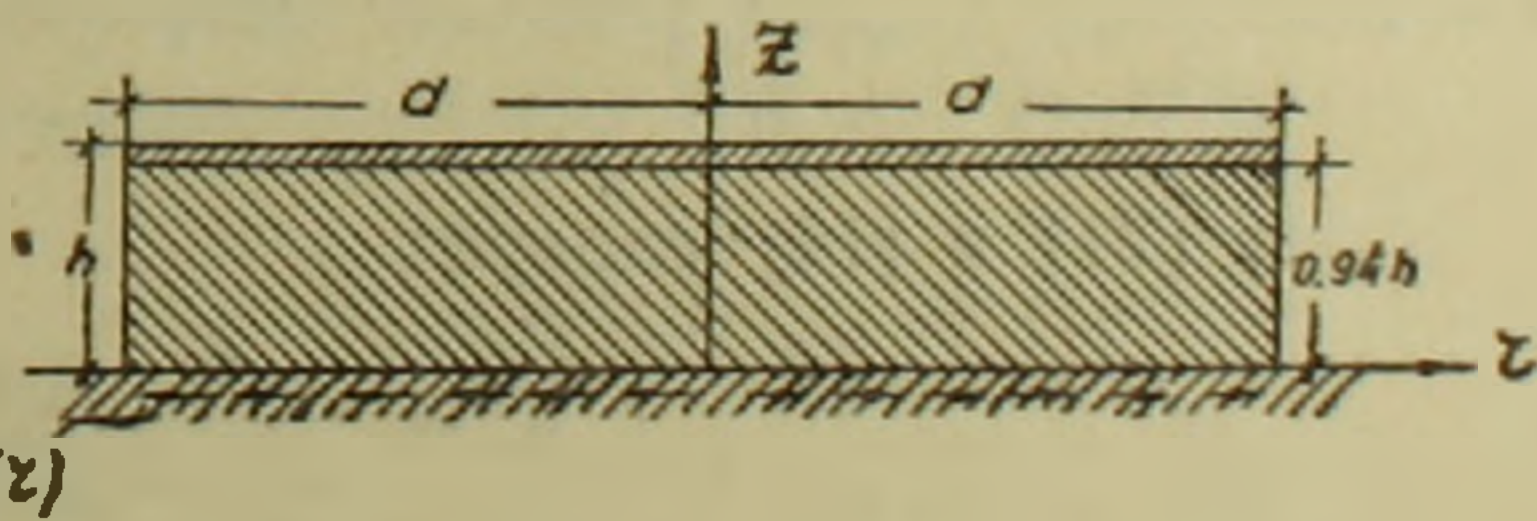
$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sigma_1 && \text{в растянутой зоне} \\ \sigma_0 &= -\sigma_2 && \text{в сжимающей зоне.}\end{aligned}\quad (14)$$

При увеличении температуры блок переходит в упруго-пластическое состояние. Однако решение полученной системы дифференциальных уравнений, описывающей эту стадию блока, даже при численном интегрировании весьма затруднительно, поэтому ограничиваемся рассмотрением лишь предельного состояния, т. е. когда блок переходит в чисто-пластическое состояние.

Учитывая, что $\sigma_r(r, z)$ и $\sigma_\theta(r, z)$ знакопостоянные функции от r , из (11) и (12) получим

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^h \sigma_\theta(r, z) dr dz &= \int_0^a r \tau(r) dr, \\ \int_0^h \sigma_\theta(r, z) z dz &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Обозначая через η^* ординаты точек границы между растягивающей и сжимающей пластическими зонами, а T_* соответствующее предельное значение T , из (15) получим (фиг. 5):



Фиг. 5.

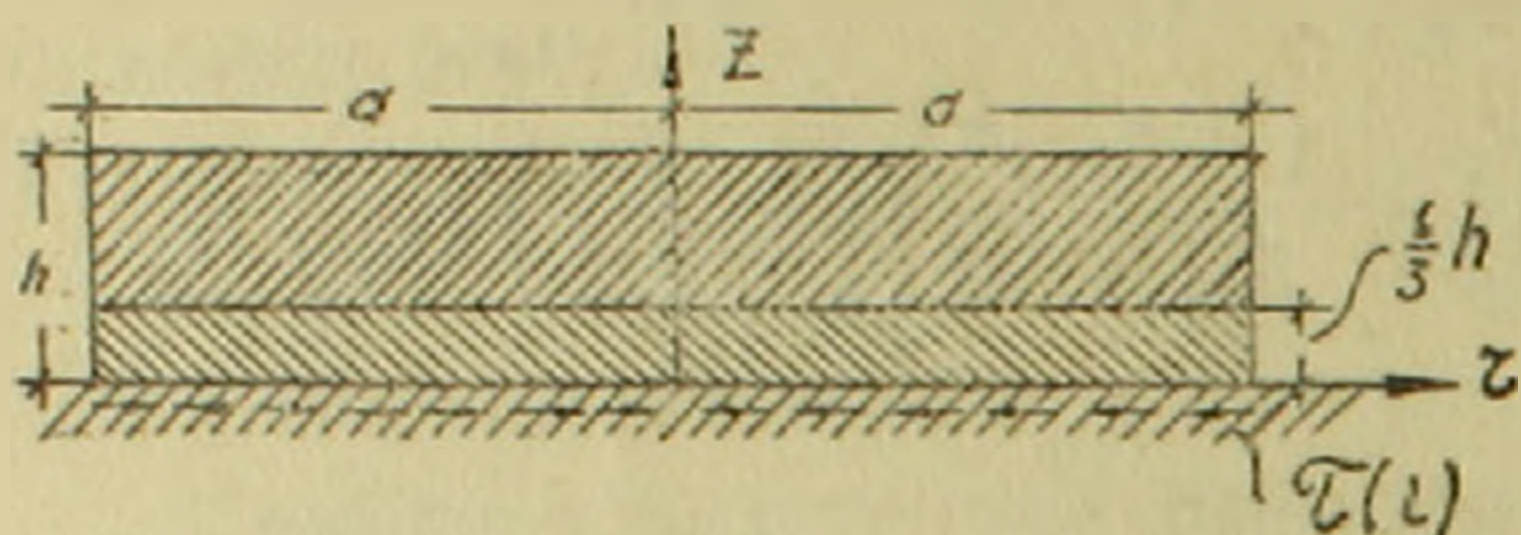
$$\eta^* = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}} h \approx 0,94h, \quad (16)$$

$$T_* = 6mT_s \frac{-\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}}{\tau_s} \approx 5,81mT_s. \quad (17)$$

В случае нагревания аналогично получим (фиг. 6).

$$\eta^* = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}} h = \frac{1}{3} h,$$

$$T_* = 6mT_s \frac{-\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)}}{\tau_s} = 24mT_s, \quad (18)$$



Фиг. 6.

б) *Предельное состояние круглого блока после укладки на него нового блока. Уравнения равновесия нижнего блока при охлаждении имеют вид*

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right] dz = 0, \quad (19)$$

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \right] z dz - h\tau(r) = 0, \quad \int_0^h \tau_{rz} dz = 0.$$

Граничные условия задачи остаются прежними (12). Для чисто-упругой стадии аналогичным путем получаем

$$\sigma_r(r, z) = \frac{3(3+\nu)}{4} \frac{\tau_s}{m} \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{2z}{h} \right), \quad (20)$$

$$\sigma_\theta(r, z) = \frac{3(3+\nu)}{4} \frac{\tau_s}{m} \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{2z}{h} \right),$$

причем $0 \leq T \leq T_s$. Преобразуя (19) и учитывая (12), можем написать

$$\int_0^h \sigma_\theta(r, z) dz = 0.$$

$$\int_0^a \int_0^h \sigma_\theta(r, z) z dr dz = -h \int_0^a r \tau(r) dr. \quad (21)$$

Из (21) и (14) следует

$$\eta^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} h \approx 0.89h,$$

$$T_* = 3mT_s \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\tau_s(\sigma_1 + \sigma_2)} \approx 5.33mT_s. \quad (22)$$

Сопоставляя формулы (22) с (17) заключаем, что нижний блок переходит в предельное состояние раньше, чем верхний.

К аналогичному выводу приходим и в случае нагревания.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռետոնցյա բլոկների սահմանային վիճակի մի խնդրի մասին

Մեր աշխատանքում ⁽¹⁾ ուսումնասիրված է հոծ առաձգական հիմքի վրա գտնվող ուղղանկյունաձև բետոնյա բլոկների առաձգա-սլափակական վիճակը հավասարաչափ սառեցման և տաքացման դեպքերում: Տեսական և սրահետիկ հետաքրքրություն է ներկայացնում ջերմության ազդեցությունից բլոկներում լարումների վերաբաշխման և սահմանային վիճակի առաջացման հարցը՝ վերջիններիս վրա նոր բլոկներ լցնելուց հետո Այստեղից առաջացող խնդիրների բնագավառը բավականաչափ ընդարձակ է և բաղադրանքներով հոգիվածում ուսումնասիրվում է այն դեպքեր, երբ երկրորդ բլոկը լցվում է համեմատաբար ոչ-մեծ ջերմաստիճանի տակ, այսինքն, երբ առաջին բլոկում դեռ չեն առաջացել սլափակական գոտիներ:

Որոշակիություն համար ընդունված է, որ բլոկների չափերը և կոնտակտների հատկությունները նույնն են:

1^o. Ուղղանկյունաձև բլոկ.— Օգտագործելով հավասարակշռության ինտեգրալ հավասարումները (1), հարթ կտրվածքների հիպոթեզը, սլափակականության պայմանի իդեալական դիագրաման, առաձգական և սլափակական գոտիների սահմանադեբում լարումների անընդհատության պայմանները արտածված են բանաձևեր նորմալ լարման,— սլափակական գոտիների սահմանադեբի հավասարումների, սլափակական գոտիների երկությունների և սահմանային ջերմաստիճանների համար:

Սառեցման դեպքում միակողմանի և երկկողմանի առաձգա-սլափակական վիճակի համար, համապատասխանաբար, նրանք արտահայտվում են (3) — (7), իսկ զուտ սլափակական վիճակի համար (8) — (10) բանաձևերով (զծ. 1, 2, 3):

Վերին և ներքին բլոկների լարվածային վիճակների համեմատումը ցույց է տալիս, որ ներքին բլոկը անցնում է զուտ սլափակական վիճակի, մինչդեռ վերին բլոկը գտնվում է կամ միակողմանի առաձգա-սլափակական (սառեցման ժամանակ) կամ զուտ առաձգական (տաքացման ժամանակ) ստադիայում (զծ. 3, 4):

2^o. Կլոր բլոկ.— Նախասկս ուսումնասիրվում է հոծ առաձգական հիմք ունեցող կլոր բլոկի զուտ սլափակական վիճակը հավասարաչափ սառեցման և տաքացման դեպքերում:

Սառեցման դեպքում բլոկի զուտ սլափակական վիճակի համար սեղմվող և ձգվող սլափակական գոտիների սահմանադեբի հավասարումները տրվում է (16), իսկ զրան համապատասխան սահմանային ջերմաստիճանը՝ (17) բանաձևերով (զծ. 5):

Բլոկի սահմանային վիճակը տաքացման դեպքում արտահայտվում է (18) բանաձևերով:

Երկրորդ բլոկը լցնելուց հետո առաջին բլոկի զուտ սլափակական վիճակը սառեցման դեպքում տրվում է (22) բանաձևերով:

Ինչպես սառեցման, այնպես էլ տաքացման ժամանակ ներքին բլոկը անցնում է զուտ սլափակական վիճակի ավելի փոքր ջերմաստիճանի տակ քան վերինը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 М. А. Задоян, Упруго-пластическое состояние прямоугольных бетонных блоков при равномерном распределении температуры, ДАН Арм ССР, XXIII, № 5, (1956). 2 В. В. Соколовский, Теория пластичности, (1952). 3 А. А. Гвоздев, Расчет несущей способности конструкции по методу предельного равновесия, (1949.)