ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIV 1957 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР

К вопросу нелинейной теории анизотропных пластинок

(Представлено 1.III.1957)

1. Предполагаем, что пластинка постоянной толщины h отнесена к декартовым координатам α, β, γ так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью α, β, а координата γ направлена в сторону ненагруженной плоскости пластинки.

Считаем, что материал пластинки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, параллельная координатной плоскости α, β (1).

В основу ставим следующие предположения:

а) нормальный к срединной плоскости линейный элемент пластинки после деформации не меняет своей длины;

б) при определении деформаций e_α, e_β и $e_{\alpha\beta}$ пренебрегаем влиянием нормальных напряжений σ_γ;

в) при определении деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений ($\tau^\circ_{\alpha\gamma}$ и $\tau^\circ_{\beta\gamma}$), найденных при наличии гипотезы недеформируемых нормалей([1]);

г) при определении удлинений и сдвигов срединной плоскости учитываем лишь те нелинейные члены, которые происходят от прогибов w([2]);

2. В силу принятых предположений имеем([1]):

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{h^2}{4}\right)\varphi^0, \qquad e_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{h^2}{4}\right)\psi^\circ, \tag{2.1}$$

$$\varphi^\circ = [a_{55}E_1(B_{ik}) + a_{45}E_2(B_{ik})]\, w^\circ(\alpha, \beta),$$

$$\psi^\circ = [a_{44}E_2(B_{ik}) + a_{45}E_1(B_{ik})]\, w^\circ(\alpha, \beta), \tag{2.2}$$

$$E_1(B_{ik}) = B_{11}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3} + 3B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^2\partial\beta} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2} + B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3},$$

$$E_2(B_{ik}) = B_{22}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3} + 3B_{26}\frac{\partial^3}{\partial\beta^2\partial\alpha} + (B_{12} + 2B_{66})\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2} + B_{16}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}, \tag{2.3}$$

где w° — прогиб пластинки, найденный при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, a_{ik}, B_{ik} — известные постоянные упругости[1].

В силу (2.1), а также принятых предположений, из общих уравнений теории упругости[3], для перемещений какой-либо точки пластинки получим:

$$u_\alpha = u - \gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \gamma\left(\frac{h^2}{8} - \frac{\gamma^2}{6}\right)\varphi^\circ,$$

$$u_\gamma = w. \tag{2.4}$$

$$u_\beta = v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} - \gamma\left(\frac{h^2}{8} - \frac{\gamma^2}{6}\right)\psi^\circ,$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v = v(\alpha, \beta)$ и $w = w(\alpha, \beta)$ — соответственно тангенциальные и нормальные перемещения срединной плоскости пластинки.

Подставляя значения u_α, u_β и u_γ из (2.4) в уравнения деформаций e_α, e_β и $e_{\alpha\beta}$[3], при этом в силу (2.4) учитывая, что

$$e_\alpha = \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1 + \gamma^3\theta_1, \quad e_\beta = \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2 + \gamma^3\theta_2, \tag{2.5}$$

$$e_{\alpha\beta} = \omega + \gamma\tau + \gamma^3\lambda,$$

для коэффициентов разложения (2.5) получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2,$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}, \tag{2.6}$$

$$\varkappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{h^2}{8}\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \alpha}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{h^2}{8}\frac{\partial \psi^\circ}{\partial \beta},$$

$$\tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \alpha}\right), \tag{2.7}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \alpha}, \qquad \theta_2 = \frac{1}{6}\frac{\partial \psi^\circ}{\partial \beta}, \qquad \lambda = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial \varphi^\circ}{\partial \beta} + \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \alpha}\right). \tag{2.8}$$

Напряжения σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ могут быть определены с помощью известных формул:

$$\sigma_\alpha = B_{11}e_\alpha + B_{12}e_\beta + B_{16}e_{\alpha\beta}, \quad \sigma_\beta = B_{22}e_\beta + B_{12}e_\alpha + B_{26}e_{\alpha\beta}, \tag{2.9}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{16}e_\alpha + B_{26}e_\beta + B_{66}e_{\alpha\beta}.$$

Эти напряжения вызывают внутренние силы и моменты, которые определяются посредством следующих формул:

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\omega, \tag{2.10}$$

$$T_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{26}\omega, \tag{2.11}$$

$$S = C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + C_{66}\omega, \tag{2.12}$$

$$M_1 = -D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{h^2}{10}\left[D_{11}\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\alpha} + \right.$$

$$\left. + D_{12}\frac{\partial\psi^\circ}{\partial\beta} + D_{16}\left(\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi^\circ}{\partial\alpha}\right)\right], \qquad (2.13)$$

$$M_2 = -D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{h^2}{10}\left[D_{22}\frac{\partial\psi^\circ}{\partial\beta} + \right.$$

$$\left. + D_{12}\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\alpha} + D_{26}\left(\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi^\circ}{\partial\alpha}\right)\right], \qquad (2.14)$$

$$H = -D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} - D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{h^2}{10}\left[D_{16}\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\alpha} + \right.$$

$$\left. + D_{26}\frac{\partial\psi^\circ}{\partial\beta} + D_{66}\left(\frac{\partial\varphi^\circ}{\partial\beta} + \frac{\partial\psi^\circ}{\partial\alpha}\right)\right], \qquad (2.15)$$

где для жесткостей имеем:

$$C_{ik} = hB_{ik}, \qquad D_{ik} = \frac{h^3}{12}B_{ik} \qquad (2.16)$$

3. Как обычно ([4]), имеем следующее уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2 = 0 \qquad (3.1)$$

и следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial S}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial\beta} + \frac{\partial S}{\partial\alpha} = 0, \qquad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial\beta^2} + T_1\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} -$$

$$- 2S\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + T_2\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + q = 0, \qquad (3.3)$$

где $q = q(\alpha, \beta)$ — внешняя нормально приложенная к срединной плоскости нагрузка.

Посредством функций напряжений $F = F(\alpha, \beta)$, представляя усилия T_1, T_2 и S следующим образом:

$$T_1 = h\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}, \qquad T_2 = h\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}, \qquad S = -h\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}, \qquad (3.4)$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия (3.2). На основании (2.10)—(2.15) и (3.4) из уравнений (3.1) и (3.3) получим следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4}-2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^3\partial\beta}+(a_{66}+2a_{12})\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}-$$

$$-2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha\partial\beta^3}+a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2=0$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^3\partial\beta}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+ \tag{3.5}$$

$$+4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha\partial\beta^3}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-h\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)=q-\frac{h^2}{10}E_1(D_{ik})\varphi^\circ-\frac{h^2}{10}E_1(D_{ik})\psi^\circ.$$

При интегрировании системы (3.5) функции $F=F(\alpha,\beta)$ и $w=w(\alpha,\beta)$ должны удовлетворять граничным условиям, которые ничем не отличаются от обычных ([1]).

Из системы (3.5) нетрудно получить соответствующие разрешающие системы дифференциальных уравнений для ортотропных, трансверсально изотропных и изотропных пластинок. Эти системы, как и (3.5), будут отличаться от обычных систем лишь правой частью второго уравнения. Учитывая, что φ° и ψ° являются известными величинами (2.2), заметим, что поправка к теории, построенной на основании гипотезы недеформируемых нормалей, представляется в виде „грузового члена".

Таким образом, решение системы (3.5) может быть найдено каким-либо известным способом ([4]).

4. Для примера рассмотрим задачу, прямоугольной ($a\times b$), трансверсально изотропной пластинки (плоскость изотропии совпадает с плоскостью $\alpha-\beta$), для которой точно удовлетворяются следующие граничные условия ([5]):

$$\begin{aligned}
&w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0 \quad \text{при}\quad \alpha=0,\ \alpha=a,\\
&w=0,\quad \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}=0 \quad \text{при}\quad \beta=0,\ \beta=b,
\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}=0 \quad \text{при}\quad \alpha=0,\ \alpha=a,\\
&\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}=0 \quad \text{при}\quad \beta=0,\ \beta=b.
\end{aligned}\tag{4.2}$$

В этом случае система (3.5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial\beta^4}=E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}=\frac{h}{D}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right]+\frac{q^*}{D} \tag{4.3}$$

$$q^*=q-\frac{Eh^2D}{10(1-\mu^2)G'}\left(\frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\alpha^6}+3\frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\alpha^4\partial\beta^2}+3\frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\alpha^2\partial\beta^4}+\frac{\partial^6 w^\circ}{\partial\beta^6}\right), \tag{4.4}$$

где E — модуль упругости для напряжений в плоскости изотропии; μ — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости; G' — модуль сдвига, характеризующий искажение углов между направлениями в плоскости изотропии и направлением, перпендикулярным к ней; $D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — жесткость изгиба.

Как известно ([5]), если к этой задаче применить способ независимого выбора аппроксимирующих функций В. З. Власова, то решение в первом приближении представится в следующем виде ([5]):

$$\frac{a^2m}{Eh^4}\int\limits_0^a\int\limits_0^b q^*(\alpha,\ \beta)\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}\,d\alpha d\beta=$$

$$=\frac{\pi^4}{48(1-\mu^2)}\left(m+\frac{1}{m}\right)^2\zeta+\frac{4234}{537{,}2(m^2+m^{-2})+322{,}5}\zeta^3 \tag{4.5}$$

$$m=\frac{b}{a},\qquad \zeta=\frac{f}{h}.$$

Это уравнение дает искомую связь между „грузовым членом“ q^* и прогибом f в центре пластинки.

Учитывая, что

$$w^\circ=f^\circ\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}=\zeta_0 h\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b} \tag{4.6}$$

для „грузового члена“ из (4.4) получим:

$$q^*(\alpha,\ \beta)=q(\alpha,\beta)+\frac{Eh^3D\pi^6}{10(1-\mu^2)G'b^6}\zeta_0(m^6+$$

$$+3m^4+3m^2+1)\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}, \tag{4.7}$$

где ζ_0 определяется из следующего известного уравнения ([5]):

$$\frac{a^2 m}{Eh^4}\int_0^b\int_0^a q(\alpha,\ \beta)\sin\frac{\pi\alpha}{a}\sin\frac{\pi\beta}{b}\,d\alpha d\beta =$$

$$= \frac{\pi^4}{48(1-\mu^2)}(m+m^{-1})^2\zeta_0 + \frac{4234}{537{,}2(m^2+m^{-2})+322{,}5}\zeta_0^3. \qquad (4.8)$$

Подставляя значение q^* из (4.7) в (4.5), получим окончательное уравнение, которое дает искомую связь между произвольной поперечной нагрузкой $q(\alpha,\ \beta)$ и прогибом f в центре прямоугольной пластинки.

В случае, когда на пластинку действует равномерно распределенная нагрузка $q(\alpha,\ \beta) = q_0 = \mathrm{const}$, то в силу (4.7) из (4.5) получим:

$$\bar{q} + \frac{\pi^8 h^2}{1920(1-\mu^2)^2 a^2}\,\frac{m^6+3m^4+3m^2+1}{m^6}\,\frac{E}{G'}\zeta_0 =$$

$$= \frac{\pi^6}{192(1-\mu^2)}\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^2\zeta + \frac{10447}{537{,}2(1+m^4)+322{,}5}\,\frac{}{m^2}\zeta^3, \qquad (4.9)$$

а для определения ζ_0 из (4.8) получим:

$$\bar{q} = \frac{\pi^6}{192(1-\mu^2)}\left(1+\frac{1}{m^2}\right)^2\zeta_0 + \frac{10447}{537{,}2(1+m^4)+322{,}5}\,\frac{}{m^2}\zeta_0^3. \qquad (4.10)$$

В этих уравнениях принято

$$\bar{q} = \frac{q_0 a^4}{Eh^4}, \qquad \zeta = \frac{f}{h}, \qquad \zeta_0 = \frac{f_0}{h}.$$

Для квадратной пластинки ($m = 1$) из (4.9) и (4.10) получим:

$$\bar{q} + \frac{\pi^8 h^2}{240(1-\mu^2)^2 a^2}\,\frac{E}{G'}\zeta_0 = \frac{\pi^6}{48(1-\mu^2)}\zeta + 7{,}48\zeta^3, \qquad (4.11)$$

$$\bar{q} = \frac{\pi^6}{48(1-\mu^2)}\zeta_0 + 7{,}48\zeta_0^3. \qquad (4.12)$$

В таблице 1 приведены значения относительного прогиба ζ при различных $\bar{q}$ и $K = \dfrac{Eh^2}{G'(1-\mu^2)a^2}$. Подсчеты выполнены посредством формул (4.11) и (4.12), при подсчетах принято $\mu = 0{,}3$. Для сравнения в последнем столбце таблицы приведены значения ζ_0.

$\bar{q}$ \ K	0,50	0,20	0,10	0,05	0,00
20	1,15	0,92	0,83	0,79	0,76
40	1,62	1,38	1,30	1,25	1,22
60	1,90	1,69	1,61	1,57	1,53

Рассматривая таблицу, замечаем, что полученная здесь поправка к теории, опирающейся на гипотезу недеформируемых нормалей, в некоторых случаях анизотропной пластинки может быть существенной.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Անիզոտրոպ սալերի ոչ գծային տեսության մասին

Աշխատանքում բերված է առաձգական անիզոտրոպ սալերի հաշվման մի տեսություն, որի հիմքում դրված են հետևյալ ընդունելությունները։

ա) e_α, e_β և $e_{\alpha\beta}$ դեֆորմացիաները հաշվելիս σ_α, σ_β և $\tau_{\alpha\beta}$ լարումների նկատմամբ արհամարհվում են σ_γ նորմալ լարումները։

բ) $e_{\alpha\beta}$ և $e_{\beta\gamma}$ դեֆորմացիաները հաշվելիս ընդունվում է, որ $\tau_{\alpha\gamma}$ և $\tau_{\beta\gamma}$ շոշափող լարումները չեն տարբերվում համապատասխան շոշափող լարումներից ($\mathring{\tau}_{\alpha\beta}$ և $\mathring{\tau}_{\beta\gamma}$), որոնք ստացվում են «դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների» հիպոթեզի օգտագործման ժամանակ։

գ) e_γ դեֆորմացիաները ամենուրեք ընդունվում է հավասար զերոյի։

դ) Միջին մակերեսի դեֆորմացիաները որոշելիս հաշվի են առնվում միայն այն ոչ գծային անդամները, որոնք ծագում են նորմալ տեղափոխումից։

Ելնելով բերված ընդունելություններից և առաձգականության ոչ գծային տեսության ընդհանուր հավասարումներից, դրված խնդրի համար ստացվում են հաշվային բանաձևերը և որոշող դիֆերենցիալ հավասարումների մի ոչ գծային սիստեմ, որը տվյալ խնդրի համար գտնված հայտնի սիստեմից տարբերվում է երկրորդ հավասարման աջ մասով։

Որոշող դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմի տեսքն այնպիսին է, որ նրա լուծման ժամանակ կարելի է օգտագործել գոյություն ունեցող մոտավոր մեթոդներից որևիցե մեկը։

Որպես օրինակ բերված է տրանսվերսալ-իզոտրոպ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի խնդրի լուծումը, երբ սալը «ազատ հենված է» իր ամբողջ պարագծով։ Խնդիրը լուծված է մոտարկող ֆունկցիայի անկախ ընտրման մեթոդով, որն առաջարկել է Վ. Զ. Վլասովը։

Բերված խնդրի լուծումը ցույց է տալիս, որ անիզոտրոպ սալերի հաշվման ժամանակ անհրաժեշտ է օգտվել այս աշխատանքում առաջարկված տեսության հաշվային բանաձևերից։ Եթե անիզոտրոպ սալերի հաշվման ժամանակ հաշվի չառնվեն այստեղ նշված ճշտումները, ապա խնդրի լուծումը որոշ դեպքերում կստացվի զգալի սխալներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Лехницкий*, Анизотропные пластинки, 1947. [2] *Т. Карман*, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encycl. der Math. Wiss. IV, 1910. [3] *В. В. Новожилов*, Основы нелинейной теории упругости, 1948. [4] *А. С. Вольмир*, Гибкие пластинки и оболочки, 1956. [5] *М. А. Котунов*, Изгиб прямоугольных пластинок с учетом больших прогибов, Инж. сборник АН СССР, т. XIII, 1952.