

2.	ՖԻԶԻԿԱՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԵՎ ՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ PHYSICAL, MATHEMATICAL AND TECHNICAL SCIENCES ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
----	--

ИЗГИБ УПРУГОЙ БАЛКИ НА УПРУГО-ПОЛЗУЧЕМ ШЕРОХОВАТОМ СЛОЕ ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ

УДК 539.3

DOI: 10.56246/18294480-2024.17-13

КУТУЗЯН НЕЛЛИ

*Кандидат физико-математических наук, доцент
Проректор Гаварского государственного университета
электронная почта: nkutuzyan@gmail.com*

ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ

*Член – корреспондент инженерной Академии Армении
Доктор физико-математических наук, профессор
электронная почта: lshekyan@mail.ru*

В работе исследовано напряженно-деформированное состояние в контактной паре упругая балка – упруго ползучий шероховатый слой, когда на балку действуют поперечные и продольные силы. Предполагается, что балка, первоначально свободно лежащая на верхней горизонтальной шероховатой поверхности слоя, начиная с определенного момента времени, нагружена линейно распределенной поперечной нагрузкой и продольными сжимающими или растягивающими силами. В результате, балка изгибается и вдавливается в слой, нижний край которого защемлен.

Исследование прочности балочных конструкций различной формы в рамках различных физических моделей является одной из сложных задач механики деформируемого твердого тела. Ввиду их актуальности и практической значимости, таким проблемам посвящено множество работ, в частности [1].

В настоящей работе принята обобщенная модель изгиба балки, предложенная С. П. Тимошенко [2], где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие осевые силы также влияют на прогибы балки. Глобальная деформация слоя определяется по модели упруго-ползущего тела, предложенная Н. Х. Арутюняном [3], где учитываются как наследственность, так и старение материала слоя. И, наконец, деформация

шероховатости поверхности слоя определяется по модели, предложенной Л. А. Галиным [4].

Задача сводится к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [5] с дополнительными условиями. Эффективное решение задачи получено методом последовательных приближений, основанным на принципе сжатых отображений в пространстве непрерывных функций с Чебышевской метрикой [6]. Приведено приближенное аналитическое решение задачи.

Ключевые слова: упругая балка, изгиб, поперечные и продольные силы, упруго-ползучий слой, шероховатость.

1. Постановка задачи. Пусть балка длины $2a$, высоты h , модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , свободно поставлена на верхней горизонтальной шероховатой поверхности упруго-ползучего слоя $\Omega = \{x \in (-\infty; \infty), z \in [0; h_1]\}$ с модулем упругости E_1 и коэффициентом Пуассона ν_1 (см. рисунок). Нижний край слоя $z = h_1$ зашлеплен. Пусть, далее, с какого-то момента времени $t = \tau_0$, балка подвергается осевым сжимающим силам T и линейно распределенной вдоль её длины поперечной нагрузке $q(x, t)$ ($-a \leq x \leq a$), ($t \geq \tau_0$), граничные значения которой являются $q_+(t) = q(a, t)$ и $q_-(t) = q(-a, t)$. При этом, балка нагружена статически, т.е. динамические эффекты не учитываются.

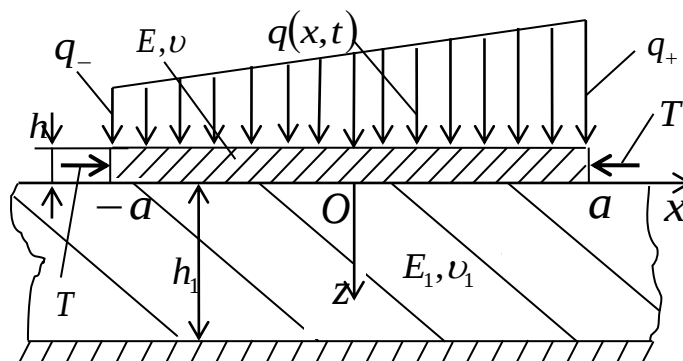


Схема загрузки балки.

Требуется определить поперечные смещения (прогибы) $w(x, t)$ точек изогнутой оси балки в направлении оси Oz и закон распределения контактного давления $p(x, t)$ между балкой и слоем в каждой точке $x \in [-a, a]$, а также изгибающих моментов $M(x, t)$ и перерезающих сил $Q(x, t)$ в каждом поперечном сечении балки x ($-a < x < a$) в каждый момент времени t ($t \geq \tau_0$).

2. Используемые физические модели. 1) *Модель изгиба балки.* В качестве физической модели, по которой определяются деформации балки, находящейся под одновременным действием поперечных и продольных сил, принимаем модель сложного изгиба балок, предложенной С. П. Тимошенко [2]. Согласно этому, дифференциальное уравнение изгиба горизонтальной балки, на которой действуют вертикальные сжимающая силы сверху $q(x, t)$ (см. рисунок) и снизу $p(x, t)$, а также сжимающие горизонтальные силы T , имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, t) - q(x, t), \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0). \quad (1)$$

Здесь $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ - изгибная жёсткость балки (балки-полоски прямоугольного поперечного сечения единичной ширины) при плоской деформации. В случае плоского напряженного состояния, жёсткость на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины выражается формулой $D = Eh^3/12$.

2) *Модель упруго-ползучего материала слоя.* Для исследования деформаций слоя, в качестве базовой физической модели принимаем уравнения теории ползучести [3], где учитываются как наследственность, так и старение материала слоя. Согласно этой теории, основное реологическое соотношение между напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ при одноосном растяжении (или сжатии) материала слоя в момент времени t имеет вид

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_1(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_1(\tau)} + C(t, \tau) \right] \sigma(\tau) d\tau, \quad (t \geq \tau_0) \quad (2)$$

где $E_1(t)$ - модуль упругости материала слоя, τ_0 - возраст материала слоя в момент приложения нагрузки, τ ($\tau_0 \leq \tau \leq t$) - его текущий возраст, $C(t, \tau) = (C_0 + A_0/\tau)[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]$ - мера ползучести материала слоя от единичной нагрузки, зависящая от текущего возраста τ и от продолжительности действия $(t - \tau)$, характеризующий наследственность. Здесь A_0 , C_0 и γ постоянные. Согласно [3], коэффициент Пуассона материала слоя $\nu_1(t)$ считается постоянным $\nu_1(t) = \nu_1 = \text{const}$. Для простоты расчетов, также предположим, что модуль упругости материала слоя $E_1(t)$ не меняется со временем $E_1(t) = E_1 = \text{const}$. Тогда соотношение (2) может быть представлено в следующей операторной форме

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_1} (I - L)\sigma(t) \quad (t \geq \tau_0) \quad (3)$$

где I - единичный оператор [$Iy(t) \equiv y(t)$], а L - интегральный оператор Вольтерра вида $Ly(t) \equiv E_1 \int_{\tau_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial \tau} C_0(t, \tau) \right] y(\tau) d\tau$.

3) *Модель расчета деформаций шероховатостей поверхности слоя.* Следуя [4], предположим, что вертикально вниз перемещение $w_1(x, t)$, которое получает в

момент времени t верхняя граничная точки слоя с координатой x ($x \in [-a, a]$), представляет собой сумму двух перемещений

$$w_1(x, t) = w_{\text{шерох}}(x, t) + w_{\text{глоб}}(x, t), \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0). \quad (4)$$

Перемещение $w_{\text{шерох}}(x, t)$, которое обусловлено деформацией шероховатостей, согласно экспериментам [4], в каждой точке x контактной зоны ($x \in [-a, a]$) пропорционально некоторой степени контактного давления $p(x, t)$ данной точки

$$w_{\text{шерох}}(x, t) = A \cdot [p(x, t)]^\beta, \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0), \quad (5)$$

где A и β положительные постоянные, притом $0,3 < \beta \leq 1$.

Перемещение $w_{\text{глоб}}(x, t)$ обусловлено глобальной деформацией слоя, когда на участке $x \in [-a, a]$ его границы $z = 0$ приложено давление $p(x, t)$.

3. Вывод основного интегрального уравнения задачи. Сначала проинтегрируем дифференциальное уравнение (1) при граничных условиях:

$$M(x, t)|_{x=\pm a} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (t \geq \tau_0) \quad (6)$$

указывающих на то, что изгибающие моменты в концевых точках балки $x = \pm a$ отсутствуют. Имеем

$$w(x, t) = \frac{1}{D} \int_{-a}^a H(x, s) [p(s, t) - q(s, t)] ds + \alpha_0(t)x + w_*(t), \quad (-a \leq x \leq a) \quad (7)$$

где

$$H(x, s) = \int_0^x (x - y) \left[\frac{\cos^2 ka \sin ky \sin ks - \sin^2 ka \cos ky \cos ks}{k \sin 2ka} + \frac{\sin(k|y-s|)}{2k} \right] dy, \quad (8)$$

$k = \sqrt{T/D}$, а $w_*(t)$ и $\alpha_0(t)$ – неизвестные функции времени, характеризующие, соответственно, перемещение вниз точки $x = 0$ балки и угол наклона касательной к нейтральной оси балки, проведенной в той же точке $x = 0$. Отметим, что формула (8) применима только при $0 < k < \pi/2a$, или при $0 < T < \pi^2 D/4a^2$. При $T = \pi^2 D/4a^2$ балка потеряет устойчивость. Отметим также, что в случае осевого растяжения балки, входящие в формулу (8) все тригонометрические функции следует заменить соответствующими гиперболическими функциями.

Затем определим $w_{\text{глоб}}(x, t)$ в зависимости от $p(x, t)$. С этой целью, приведём выражение вертикально вниз перемещения $w_{\text{упруг}}(x)$ верхней граничной точки x ($-a \leq x \leq a$) соответствующего упругого гладкого слоя [7]

$$w_{\text{упруг}}(x) = \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-a}^a U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s) ds, \quad (-a \leq x \leq a), \quad (9)$$

где ядерная функция $U(y)$ выражается формулой

$$U(\xi) = \int_0^\infty \frac{(2\varepsilon \sinh 2y - 4y) \cos \xi y}{\varepsilon(2\varepsilon \cosh 2y + 1 + \varepsilon^2 + 4y^2)} dy, \quad (\varepsilon = 3 - 4\nu_1). \quad (10)$$

Сравнивая реологическое соотношение (3) с законом Гука, получаем формулу для определения перемещения $w_{\text{глоб}}(x, t)$, аналогичное (9)

$$w_{\text{глоб}}(x, t) = \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} (I - L) \int_{-a}^a U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s, t) ds, \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0). \quad (11)$$

Далее, запишем условие контакта задачи, представляющее собой равенство вертикальных перемещений вниз соприкасающихся между собой граничных точек балки $w(x, t)$ и слоя $w_1(x, t)$. Это условие, с учётом (4), имеет вид

$$w(x, t) = w_{\text{шперох}}(x, t) + w_{\text{грос}}(x, t), \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0). \quad (12)$$

Наконец, поставив выражения перемещений $w_{\text{шперох}}(x, t)$, $w(x, t)$ и $w_{\text{грос}}(x, t)$, соответственно, из (5), (7) и (11) в условие контакта (12), получим основное интегральное уравнение задачи

$$\begin{aligned} & \frac{1}{D} \int_{-a}^a H(x, s) [p(s, t) - q(s, t)] ds + \alpha_0(t)x + w_*(t) = \\ & = A \cdot [p(x, t)]^\beta + \frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} (I - L) \int_{-a}^a U\left(\frac{s-x}{h_1}\right) p(s, t) ds, \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0). \end{aligned} \quad (13)$$

что является относительно $p(x, t)$ нелинейным интегральным уравнением, в которое входят также неизвестные харакетрные величины $w_*(t)$ и $\alpha_0(t)$.

4. Эффективное аналитическое решение задачи. Сначала определим $p(x, t)$, $w_*(t)$ и $\alpha_0(t)$ из уравнения (13) с использованием условий равновесия балки

$$\int_{-a}^a [p(x, t) - q(x, t)] dx = 0, \quad \int_{-a}^a x[p(x, t) - q(x, t)] dx = 0. \quad (14)$$

Как только определены $p(x, t)$, $w_*(t)$ и $\alpha_0(t)$, соотношением (11) можем определить перемещение $w(x, t)$, а затем можем определить $M(x, t)$ и $Q(x, t)$ формулами [2]

$$M(x, t) = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad Q(x, t) = D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \quad (-a < x < a, \quad t \geq \tau_0). \quad (15)$$

Важно заметить, что контактное давление $p(x, t)$ не может иметь особенностей в окрестности концевых точек балки. В противном случае, левая часть уравнения (13) будет неограничено, в то время как его правая часть ограничено во всех точках контактной зоны. Этот факт позволяет искать $p(x, t)$ в пространстве непрерывных функций. Далее, условия равновесия (14) представим в виде

$$\int_{-a}^a p(x, t) dx = P(t), \quad \int_{-a}^a x p(x, t) dx = M(t), \quad (t \geq \tau_0) \quad (16)$$

где $P(t)$ и $M(t)$ - величины главного вектора и относительно точки $x = 0$ главного момента заданной нагрузки $q(x, t)$

$$P(t) \equiv \int_{-a}^a q(x, t) dx, \quad M(t) \equiv \int_{-a}^a x q(x, t) dx. \quad (t \geq \tau_0) \quad (17)$$

Так как $q(x, t)$ линейная функция от x , то можем написать

$$q(x, t) = \frac{q_+(t) + q_-(t)}{2} + \frac{q_+(t) - q_-(t)}{2a} x, \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0), \quad (18)$$

где $q_+(t) = q(a, t)$ и $q_-(t) = q(-a, t)$. Тогда, учитывая (17) и (18), получим

$$q(x, t) = \frac{P(t)}{2a} + \frac{3M(t)}{2a^3} x, \quad (-a \leq x \leq a, \quad t \geq \tau_0). \quad (19)$$

Далее, введя безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{s}{a}, \quad h_0 = \frac{h_1}{a}, \quad m = \frac{1}{\beta}, \quad w_0(t) = \frac{w_*(t)}{a}, \quad P_0(t) = \frac{A^m}{a^{m+1}} P(t), \quad M_0(t) = \frac{A^m}{a^{m+2}} M(t),$$

$$p_0(\xi, t) = \frac{A}{a} [p(x, t)]^\beta, \quad f[\xi, P_0(t), M_0(t)] = D^{-1} \int_{-1}^1 H(a\xi, a\eta) [P_0(t) + M_0(t)\eta] d\eta, \\ H_0(\xi, \eta) = \left(\frac{a}{A}\right)^m \cdot D^{-1} H(x, s), \quad U_0(y) = \frac{2(1-v_1^2)}{\pi E_1} \left(\frac{a}{A}\right)^m U\left(\frac{y}{h_0}\right), \quad (20)$$

уравнение (13) переходит к нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна [5] относительно новой неизвестной функции $p_0(\xi, t)$

$$p_0(\xi, t) = f[\xi, P_0(t), M_0(t)] + \alpha_0(t)\xi + w_0(t) + \\ + (I - L) \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] \cdot [p_0(\eta, t)]^m d\eta, \quad (21)$$

а условия равновесия (16) даст

$$P_0(t) = \int_{-1}^1 [p_0(\xi, t)]^m d\xi, \quad M_0(t) = \int_{-1}^1 [p_0(\xi, t)]^m \xi d\xi. \quad (22)$$

Соотношения (21)-(22) образуют замкнутую систему нелинейных уравнений относительно $p_0(\xi, t)$, $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$. При решении этой системы, во избежание сложных математических вычислений, параллельно рассмотрим соответственную обратную задачу, когда $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$ заданы, а $P_0(t)$ и $M_0(t)$ являются неизвестными. С точки зрения механики, в этих двух задачах мы имеем одинаковую зависимость между пар ($\alpha_0(t)$, $w_0(t)$) и ($P_0(t)$, $M_0(t)$). Однако, с точки зрения математических вычислений, использование (22) для определения $P_0(t)$ и $M_0(t)$ несравнительно легче, чем определить $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$ с помощью того же (22). Более того, $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$ в явном виде в (22) не входят, и они входят в нём только посредством $p_0(\xi, t)$, притом в довольно сложном виде. Итак, вместо определения $p_0(\xi, t)$, $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$, из (21)-(22) мы определим $p_0(\xi, t)$, $P_0(t)$ и $M_0(t)$ в зависимости от $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$. Важно также отметить, что сделанный подход к решению (21)-(22) стал возможен благодаря линейности нагрузки $q(x, t)$ от координата x , при которой нагрузка $q(x, t)$ формулой (19) выражается через её интегральные характеристики $P(t)$ и $M(t)$.

Итак, переходим к решению системы уравнений (21)-(22) относительно $p_0(\xi, t)$, $P_0(t)$ и $M_0(t)$, считая, что $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$ заданы. С этой целью, следуя [8], вводим в рассмотрение вектор новых неизвестных $\bar{x} = \{p_0(\xi, t), P_0(t), M_0(t)\}$ и систему уравнений (21)-(22) представим в операторном виде $\bar{x} = G(\bar{x})$. Тогда решение этой системы сводится к определению неподвижной точки нелинейного оператора G [6]. Далее, рассмотрим множество X всех элементов $\bar{x}$, компоненты которых $p_0(\xi, \tau)$, $P_0(\tau)$ и $M_0(\tau)$ являются непрерывными функциями при $\xi \in [-1; 1]$ и $\tau_0 \leq \tau \leq t$. Теперь в множестве X введём чебышевскую метрику формулой

$$\rho(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \max_{-1 \leq \xi \leq 1} \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} |p_{01}(\xi, \tau) - p_{02}(\xi, \tau)| + \\ + \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} |P_{01}(\tau) - P_{02}(\tau)| + \max_{\tau_0 \leq \tau \leq t} |M_{01}(\tau) - M_{02}(\tau)|, \quad (23)$$

где $\bar{x}_i = \{p_{0,i}(\xi, t), P_{0,i}(t), M_{0,i}(t)\} (i = 1, 2)$ – две произвольные элементы из X . Нетрудно доказать, что множество X с метрикой (23) становится полным метрическим

пространством [6]. Тогда, предложенным в [8] способом нетрудно доказать, что существует область изменения характерных параметров задачи и существует некоторый замкнутый шар в пространстве X с центром $\bar{O} = \{0,0,0\}$, где оператор G отображает этот шар в себе, и в нем G является сжимающим оператором [6]. Тогда, для любого начального элемента $\bar{x}_0$ из этого шара, с помощью рекуррентных формул $\bar{x}_{i+1} = G(\bar{x}_i)$, ($i = 0,1,2,\dots$), т.е.

$$\begin{aligned} p_{0,i+1}(\xi, t) &= f[\xi, P_{0,i}(t), M_{0,i}(t)] + \alpha_0(t)\xi + w_0(t) + \\ &+ (I - L) \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] \cdot [p_{0,i}(\eta, t)]^m d\eta, \\ P_{0,i+1} &= \int_{-1}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m d\xi, \quad M_{0,i+1} = \int_{-1}^1 [p_{0,i}(\xi)]^m \xi d\xi, \quad (i = 0,1,2,\dots), \end{aligned} \quad (24)$$

получим последовательность $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^\infty$, которая по метрике (23) стремится к пределу $\bar{x}^*$, для которого $\bar{x}^* = G(\bar{x}^*)$, притом, точка $\bar{x}^*$ единственная. Следовательно, $\bar{x}^*$ соответствует единственному решению системы уравнений (21)-(22), а последовательность $\{\bar{x}_i\}_{i=0}^\infty$ будет последовательностью приближенных решений.

Наконец, принимая $\bar{x}_0 = \bar{O}$ в качестве нулевого приближения и используя формулы (24), получим решение системы уравнений (21)-(22) в первом приближении

$$p_{0,1}(\xi, t) = \alpha_0(t)\xi + w_0(t), \quad P_{0,1}(t) = 0, \quad M_{0,1}(t) = 0, \quad (-1 \leq \xi \leq 1, t \geq \tau_0). \quad (25)$$

Учитывая (25), решение системы (21)-(22) во втором приближении будет

$$\begin{aligned} p_{0,2}(\xi, t) &= (I - L) \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] [\alpha_0(t)\xi + w_0(t)]^m d\eta + \\ &+ \alpha_0(t)\xi + w_0(t), \quad (-1 \leq \xi \leq 1, t \geq \tau_0), \\ P_{0,2}(t) &= \int_{-1}^1 [\alpha_0(t)\xi + w_0(t)]^m d\xi, \quad M_{0,2}(t) = \int_{-1}^1 [\alpha_0(t)\xi + w_0(t)]^m \xi d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Соотношениями (26) устанавливаются зависимости $\alpha_0(t)$ и $w_0(t)$ от $P_0(t)$ и $M_0(t)$ во втором приближении. В частном случае, когда поперечная нагрузка балки распределена равномерно, формулы (26) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} p_{0,2}(\xi, t) &= (I - L)[w_0(t)]^m \int_{-1}^1 [H_0(\xi, \eta) - U_0(\xi - \eta)] d\eta + w_0(t), \\ P_{0,2}(t) &= 2[w_0(t)]^m, \quad M_{0,2}(t) = 0, \quad (-1 \leq \xi \leq 1, t \geq \tau_0). \end{aligned} \quad (27)$$

5. Основные выводы. Итак, в отличие от классических задач изгиба балки на деформируемом основании, в настоящей работе учтены ряд факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние в контактной паре балка-основание. Задача математически формулируется в виде сложной системы уравнений, но за счет линейного распределения поперечной нагрузки балки, удалось решить задачу без сложных расчетов. Выяснено, что из-за шероховатости поверхностного слоя, контактное давление не имеет особенности вблизи концов балки. Установлено, что существует значение осевых сжимающих сил, при котором балка потеряет устойчивость.

Список использованной литературы

1. Лебедев А. В., Расет балок и пластин на упругом основании методом конечных элементов с использованием модели упругого пространства / Евразийский союз ученых. Серия: Технич. и физ.-мат. Науки, т. 1, №01(94), 2022, с. 20-25.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.
3. Арутюнян Н. Х., Некоторые вопросы теории ползучести, М.-Л., 1952, 323 с.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости, М., Наука, 1980, 303 с.
5. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960, 300 с.
6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, 7-е изд., М., Физматлит, 2004, 572 с.
7. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А., Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., Наука, 1974, 456 с.
8. Мхитарян С. М., Шемян Л. А., Плоская контактная задача для двух шероховатых твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющихся материалов // Изв. АН АрмССР, Механика, 1977, т. 30, №3, с. 15 – 32.

ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԵԾԱՆԻ ՃԿՈՒՄԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ-ՍՈՂԱՑՈՂ ԱՆՀԱՐԹ ՇԵՐՏԻ ՎՐԱ՝ ԼԱՅՆԱԿԻ ԵՎ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ ՌԻԺԵՐՈՎ

ԿՈՒՏՈՒՋՅԱՆ ՆԵԼԼԻ

*Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր,
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ*
էլփոստ՝ nkutuzyan@gmail.com

ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ

ՀՀ ՃԱ թղթ. անդամ, ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր
էլփոստ՝ lshkeyan@mail.ru

Աշխատանքում ուսումնասիրված է միմյանց հետ հպակային զույգ կազմող առաձգական հեծանի և անհարթ առաձգական-սողացող շերտի լարվածադեֆորմացիոն վիճակը, երբ հեծանի վրա ազդում են լայնակի և երկայնական ուժեր: Ենթադրվում է, որ շերտի վերին հորիզոնական անհարթ մակերևույթի վրա նախապես ազատորեն դրված հեծանը բեռնված է գծային բաշխված լայնակի բեռով և երկայնական սեղմման կամ ձգման ուժերով: Դրա հետևանքով հեծանը ճկվում և սեղմվում է շերտի մեջ: Շերտի ստորին եզրը ամրակցված է:

Տարբեր ձևերի հեծանային կառուցվածքների ամրության ուսումնասիրությունը տարբեր ֆիզիկական մոդելների շրջանակներում դեֆորմացվող պինդի մեխանիկայի

բարդ խնդիրներից է: Իրենց արդիականության և գործնական նշանակության համար նման խնդիրներին նվիրված են բազմաթիվ աշխատանքներ [1]:

Ներկա աշխատանքում ընդունված է Ս. Պ. Տիմոշենկոյի առաջարկված հեծանների ճկման ընդհանրացված մոդելը [2], որտեղ, բացի լայնակի ուժերից, երկայնական (առանցքային) սեղմման կամ ձգման ուժերը նույնպես ազդում են հեծանների ճկման վրա: Շերտի գլոբալ դեֆորմացիան ուսումնասիրված է Ն. Խ. Հարությունյանի առաջարկած առաձգական-սողացող մարմնի մոդելի շրջանակներում [3], որտեղ հաշվի են առնվում շերտի նյութի և՛ ժառանգա-կանությունը, և՛ ծերացումը: Եվ, վերջապես, շերտի մակերեսի անհարթության դեֆորմացիայի որոշման համար ընտրված է Լ. Ա. Գալինի առաջարկած մոդելը [4]:

Խնդիրը բերված է Համերշտեյնի տիպի [5] ոչ գծային ինտեգրալ հավասարման լրացուցիչ պայմաններով: Խնդրի արդյունավետ լուծումը ստացված է հաջորդական մոտարկումների մեթոդով, որը հիմնավորված է սեղմված արտապատկերումների սկզբունքով՝ չեբիշևյան մետրիկայով որոշված անընդհատ ֆունկցիաների տարածության մեջ [6]: Բերված է խնդրի մոտավոր վերլուծական լուծումը:

Քանալի բառեր՝ առաձգական հեծան, ճկում, լայնակի և երկայնական ուժեր, առաձգական-սողացող շերտ, անհարթություն:

BENDING OF AN ELASTIC BEAM ON AN ELASTIC-CREEPING ROUGH LAYER BY TRANSVERSE AND LONGITUDINAL FORCES

KUTUZYAN NELLY

PhD in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor

Vice-Rector of Gavar State University

e-mail: nkutuzyan@gmail.com

SHEKYAN LAVRENTIY

Corresponding Member of the Engineering Academy of Armenia,

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Full Professor

e-mail: lshekyan@mail.ru

The work investigates the stress-strain state in the contact pair of an elastic beam – an elastically creeping layer in the presence of transverse and longitudinal forces of the beam and taking into account the roughness of the layer surface. It is assumed that the beam, initially lying freely on the upper horizontal rough surface of the layer, is loaded with a linearly distributed transverse load and longitudinal (axial) compressive or tensile forces. As a result, the beam bends and is pressed into the layer, the lower edge of which is pinched.

Studying the strength of beam structures of various shapes within the framework of various physical models is one of the most difficult problems in the mechanics of a deformable solid. Due to their relevance and practical significance, many articles are dedicated to such problems, in particular [1].

In this work, a generalized beam bending model proposed by S.P. Timoshenko [2] is adopted, where in addition to transverse forces, longitudinal compressive or tensile axial forces also influence beam deflections. To study the global deformation of the layer, the elastic-creeping body model proposed by N. Kh. Harutyunyan [3] is used, where both heredity and aging of the layer material are taken into account. And finally, the deformation of the layer surface roughness was taken into account according to the model proposed by L. A. Galin [4].

The problem is reduced to a nonlinear integral equation of Hammerstein type [5] with additional conditions. An effective solution to the problem was obtained by the method of successive approximations, based on the principle of compressed mappings in the space of continuous functions with the Chebyshev metric [6]. An approximate analytical solution of the problem is given.

Keywords: *elastic beam, bending, transverse and longitudinal forces, elastic-creeping layer, roughness.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 07.09.2024թ.:

Հոդվածը գրախոսվել է 14.09.2024թ.:

Ընդունվել է տպագրության 30.11.2024թ.: