

М. А. Задоян

Упруго-пластическое состояние прямоугольных бетонных
 блоков при равномерном распределении температуры

(Представлено Н. Х. Арутюняном 23. X. 1956)

В настоящей работе рассматривается задача об упруго-пластическом состоянии прямоугольного бетонного блока от воздействия равномерной температуры при условии идеальной пластичности материала (1, 2).

Пусть прямоугольный блок высотой h , шириной b и длиной $2l$, лежащий на сплошном основании, находится под воздействием постоянной температуры T . Полагаем, что коэффициент температурного расширения материала блока больше, чем основания. Значение температуры, при которой на концах контакта блока и основания возникает предельное касательное напряжение τ_s , обозначим через T_s , которое определяется из опыта. Положим, что $T \leq T_s$.

Принимаем, что касательные напряжения вдоль контакта блока распределены по закону

$$\tau(x) = \tau_s \frac{x}{l} \frac{T}{T_s} \quad (1)$$

1°. Уравнения равновесия в случае охлаждения блока будут

$$\int_0^h \sigma_x(x, y) dy - \int_x^l \tau(x) dx = 0, \quad (2)$$

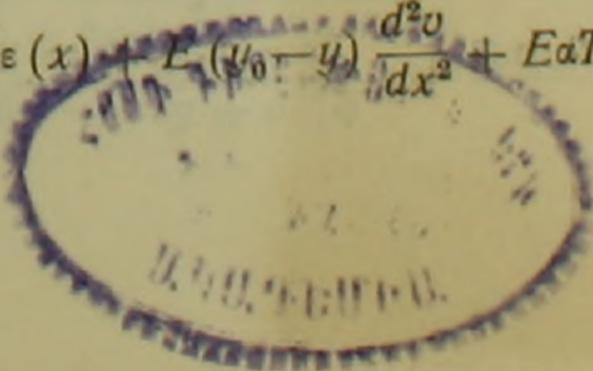
$$\int_0^h \sigma_x(x, y) y dy = 0, \quad \int_0^h \tau_{xy}(x, y) dy = 0.$$

(В случае нагревания в уравнении (2) следует изменить знак—).

Обозначим пределы текучести бетона при растяжении и сжатии соответственно через σ_1 и σ_2 . В частности принимаем $\tau_s = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_2}{16}$.

Пусть прямоугольный блок подвергается равномерному охлаждению от нуля до $-T^\circ$. Пока T мало, блок будет находиться в чистоупругом напряженном состоянии. Из гипотезы плоских сечений имеем

$$\sigma_x(x, y) = E\varepsilon(x) + E(y_0 - y) \frac{d^2v}{dx^2} + E\alpha T, \quad (3)$$



где $\epsilon(x)$ и $v(x)$ суть продольные деформации и прогиб нейтрального слоя блока, y_0 — расстояние нейтрального слоя от основания блока, E — модуль упругости, а α — коэффициент температурного расширения материала блока.

Из (1)–(3) находим

$$\sigma_x(x, y) = \tau_s \frac{T}{T_s} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{3y}{2h}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{3}{2} \frac{\tau_s}{Ehm} \cdot \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right), \quad T_1 = m \frac{\sigma_1}{\tau_s} T_s = 2m T_s, \quad y_0 = \frac{2}{3} h, \quad (4)$$

где $m = \frac{h}{2l}$, T_1 — значение температуры, при которой впервые в нижней грани среднего поперечного сечения блока возникают пластические деформации.

Если $m < \frac{\tau_s}{\sigma_1} = \frac{1}{2}$, то при дальнейшем увеличении температуры ($T > T_1$) в соседних точках $A(0, 0)$ будут также развиваться пластические деформации и тем самым наступит одностороннее упруго-пластическое состояние. Обозначим ординаты границы между упругими и пластическими зонами через $\eta(x)$, а длину пластической зоны через $2x_1$. Для части блока $|x_1| \leq |x| \leq |l|$ справедливы соотношения (4), а для $0 \leq |x| \leq x_1$ будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 \leq y \leq \eta \\ E\epsilon(x) + E(y_0 - y) \frac{d^2v}{dx^2} + E\alpha T & \text{при } \eta \leq y \leq h. \end{cases} \quad (5)$$

Из (2), (5) и условия $\sigma_x^e[x, \eta(x)] = \sigma_x^p[x, \eta(x)]$ получим

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\omega - \sigma_1 \eta}{h - \eta} + \frac{3[(h + \eta)\omega - \sigma_1 h \eta](h + \eta - 2y)}{(h - \eta)^3}, \quad (6)$$

$$\eta(x) = \frac{h}{2} \left[\frac{3\omega(x)}{\sigma_1 h - \omega(x)} - 1 \right],$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{6}{E} \cdot \frac{(h + \eta)\omega - \sigma_1 h \eta}{(h - \eta)^3},$$

где
$$\omega(x) = \int_x^l \tau(x) dx = \tau_s \frac{T}{T_s} \frac{l}{2} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Из уравнения $\eta(x_1) = 0$ находим

$$x_1 = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T}}, \quad T_1 \leq T \leq T_s. \quad (7)$$

Уравнение нейтральной оси блока определяется формулой

$$y_0(x) = \frac{h + \eta}{2} + \frac{(\omega - \sigma_1 \eta)(h - \eta)^2}{6[(h + \eta)\omega - \sigma_1 h \eta]}. \quad (8)$$

Значение T , при котором в точке $B(0, h)$ возникают пластические деформации, обозначим через T_2 . Если $T_2 \leq T \leq T_s$, то блок переходит в двухстороннее упруго-пластическое состояние. В этом случае в частях блока $|x_1| \leq |x| \leq |l|$ и $|x_2| \leq |x| \leq |x_1|$ решение задачи определяется из соотношений (4)–(7), а для $0 \leq |x| \leq |x_2|$ (где $2x_2$ длина возникающей пластической зоны) будем иметь

$$\sigma_r(x, y) = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } 0 \leq y \leq \eta_{11} \\ E\varepsilon(x) + E(y_0 - y) \frac{d^2v}{dx^2} + E\alpha T, & \text{при } \eta_{11} \leq y \leq \eta_{12} \\ -\sigma_2 & \text{при } \eta_{12} \leq y \leq h. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь η_{11} и η_{12} ординаты границы пластических зон, при $0 \leq |x| \leq |x_2|$. Из соотношений (2), (9) и условия

$$\sigma_x^e[x, \eta_{11}(x)] = \sigma_x^p[x, \eta_{11}(x)]; \quad \sigma_x^e[x, \eta_{12}(x)] = \sigma_x^p[x, \eta_{12}(x)],$$

находим

$$\sigma_x(x, y) = \sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{y - \eta_{11}}{\eta_{12} - \eta_{11}},$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta_{11}(x) \\ \eta_{12}(x) \end{array} \right\} = \frac{\sigma_2 h + \omega(x) \mp \sqrt{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)h^2 - [\sigma_2 h + \omega(x)]^2}}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (10)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E(\eta_{12} - \eta_{11})};$$

Уравнение $\eta_{12}(x_2) = h$ дает

$$x_2 = l \sqrt{1 - \frac{T_2}{T}}, \quad T_2 \leq T \leq T_s, \quad (11)$$

где

$$T_2 = m \frac{T_s}{\tau_s} \left[-3\sigma_2 + \sigma_1 + \sqrt{3} \sqrt{(3\tau_2 - \sigma_1)(\sigma_1 + \sigma_2)} \right] \approx 2,8 m T_s. \quad (12)$$

При $T \rightarrow T_2$ из (7) находим

$$x_1 = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T_2}} \approx 0,69 l;$$

Уравнение нейтральной оси ($0 \leq |x| \leq |x_2|$) будет

$$y_0(x) = \frac{\sigma_1 \eta_{12}(x) + \sigma_2 \eta_{11}(x)}{\sigma_1 + \sigma_2}.$$

Когда упругая часть в среднем поперечном сечении исчезает, т. е. наступает чисто пластическое (предельное) состояние (фиг. 1), будем иметь

$$\eta_{11}(0) = \eta_{12}(0) = \eta_{1*}(0) = h \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}} \approx 0,94 h$$

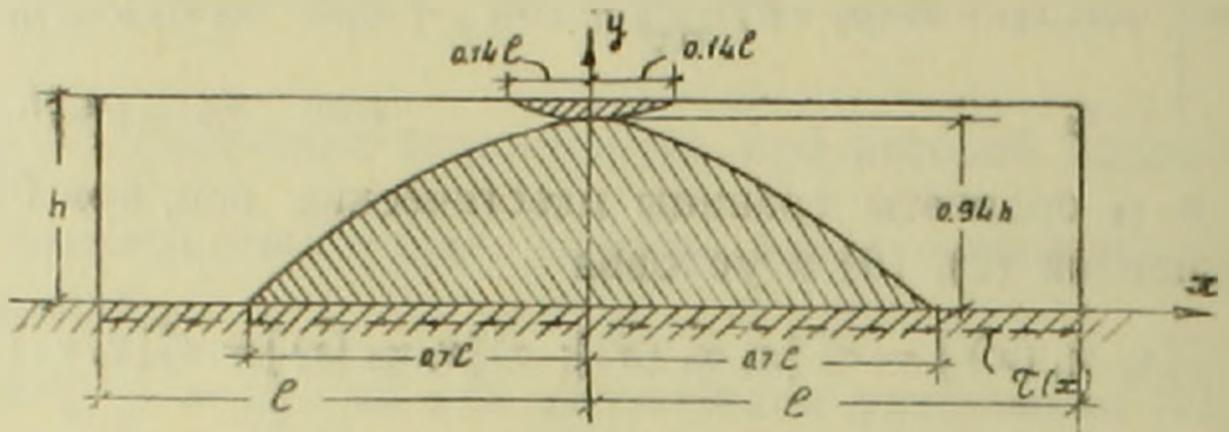
$$T_* = 4m \frac{T_s}{\tau_s} \left[-\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)} \right] \approx 3,87 m T_s$$

$$x_1^* = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T_s}} \approx 0,14l, \quad x_2^* = l \sqrt{1 - \frac{T_2}{T_s}} \approx 0,70l, \quad (13)$$

$$y_0^*(0) = \eta_*(0) = 0,94h,$$

Из (13) видно, что если

$$m < \frac{1}{4} \frac{\tau_s}{-\sigma_2 + \sqrt{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}} \approx 0,26$$



Фиг. 1.

(т. е. для обычных блоков), то при охлаждении среднее сечение блока переходит в чисто пластическое состояние, а в основании еще не возникают пластические деформации от касательных напряжений.

2'. В случае равномерного нагревания блока, задача решается аналогичным методом. В чисто упругой стадии имеем

$$\sigma_x(x, y) = -\tau_s \frac{T}{T_s} \frac{1}{m} \left(1 - \frac{3y}{2h}\right) \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{3}{2} \frac{\tau_s}{Ehm} \cdot \frac{T}{T_s} \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

(14)

$$T_1 = 2m \frac{\sigma_1}{\tau_s} T_s = 4m T_s, \quad y_0 = \frac{2}{3} h.$$

При нагревании, пластические деформации сначала возникают на верхней грани блока. При одностороннем упруго-пластическом состоянии будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = \frac{6 \left(\frac{2}{3} \eta - y\right) [\sigma_1 h (h - \eta) - \eta \omega]}{\eta^3} - \frac{\sigma_1 (h^2 - \eta^2)}{\eta^2},$$

$$\eta(x) = \frac{3h}{2} \cdot \frac{\sigma_1 h}{\sigma_1 h - \omega(x)},$$

$$x_1 = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T}}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{6}{E\eta^2} \left[\frac{\sigma_1 (h - \eta) h}{\eta} - \omega \right], \quad (15)$$

$$y_0(x) = \frac{2}{3} \eta \left\{ 1 - \frac{\sigma_1 (h^2 - \eta^2)}{4[\sigma_1 h (h - \eta) - \eta \omega]} \right\},$$

при $0 \leq |x| \leq |x_1|$. Когда $T \rightarrow T_2$:

$$x_1 = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T_2}} \approx 0,83l,$$

$$T_2 = 2m \frac{T_s}{\tau_s} [-2\sigma_1 + \sqrt{3} \sqrt{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)}] \approx 12,8m T_s \quad (16)$$

$$\eta_1(0) = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}} h \approx 0,58 h; \quad y_0(0) \approx 0,51 h.$$

Для двухстороннего упруго-пластического состояния получим

$$\sigma_r(x, y) = \sigma_1 - (\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\eta_{11} - y}{\eta_{11} - \eta_{12}}.$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{11}(x) \\ \eta_{12}(x) \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_1 h + \omega(x) \pm \sqrt{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2) h^2 - [\sigma_1 h + \omega(x)]^2}}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (17)$$

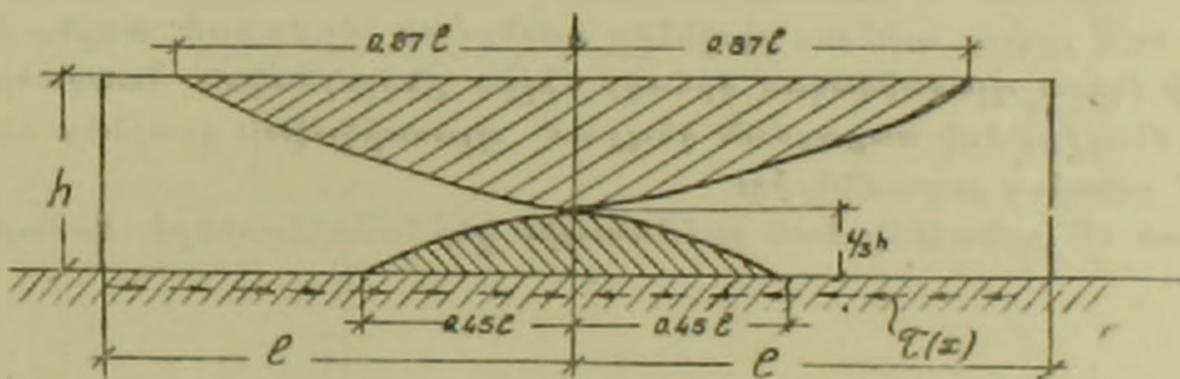
$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E(\eta_{12} - \eta_{11})},$$

$$x_2 = l \sqrt{1 - \frac{T_2}{T}};$$

$$y_0(x) = \frac{\sigma_1 \eta_{12}(x) + \sigma_2 \eta_{11}(x)}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

при $0 \leq |x| \leq |x_2|$.

Когда в среднем поперечном сечении возникает чисто пластическое состояние (фиг. 2), т. е. при $T \rightarrow T_* \leq T_s$, находим



Фиг. 2.

$$\eta_{11}(0) = \eta_{12}(0) = \eta_{1*}(0) = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}} \cdot h = \frac{1}{3} h$$

$$T_* = 4m \frac{T_s}{\tau_s} [-\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)}] = 16m T_s \quad (18)$$

$$x_1^* = l \sqrt{1 - \frac{T_1}{T_*}} \approx 0,87l, \quad x_2^* = l \sqrt{1 - \frac{T_2}{T_*}} \approx 0,45l;$$

$$y_0^*(0) = \eta_{1*}(0) = \frac{1}{3} h.$$

Из соотношений (18) видно, что при нагревании предельное состояние от нормальных напряжений возникает, когда

$$m < \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau_s}{-\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_2)}} = \frac{1}{16}$$

Для сравнительно больших m пластические деформации возникают и в основании блока от касательных напряжений.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Ուղղանկյունաձև բետոնյա բլոկների առաձգա-պլաստիկական վիճակը հավասարաչափ բաշխված ջերմաստիճանի դեպքում

Հետազոտվում է հոծ, առաձգական հիմք ունեցող ուղղանկյունաձև բետոնյա բլոկների առաձգա-պլաստիկական լարվածային վիճակը հավասարաչափ սառեցման և տաքացման դեպքերում:

Ընդունված է, որ բլոկի հիմքում առաջացող շոշափող լարումների մեծությունները համեմատական են ջերմաստիճանին և ընդլայնական հատվածքից ունեցած հեռավորությունը:

Օգտագործելով հավասարակշռության ինտեգրալ հավասարումները, հարթ կտրվածքների հիպոթեզը, պլաստիկականության պայմանի իդեալական դիադրաման և լարումների անընդհատության պայմանը, արտածված են բանաձևեր նորմալ լարման, պլաստիկական գոտիների սահմանագծի հավասարումների և պլաստիկական գոտիների երկարությունների համար:

Մասնավորապես սառեցման դեպքում խնդրի լուծումը տրվում է միակողմանի առաձգա-պլաստիկական վիճակի համար (5)–(8), երկկողմանի առաձգա-պլաստիկական վիճակի համար (9)–(12) և գուտ պլաստիկական վիճակի համար (13) բանաձևերով:

Ուղղանկյուն չափեր ունեցող բլոկները սառեցման ժամանակ անցնում են սահմանային վիճակի (գուտ պլաստիկական վիճակ) միջին ընդլայնական հատվածքում գործող նորմալ լարումներից, իսկ տաքացման դեպքում պլաստիկական գոտիներ են առաջանում նաև հիմքում շոշափող լարումներից:

Ուთացված են բանաձևեր նաև սահմանային ջերմաստիճանների համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Н. Х. Арутюнян и Б. Л. Абрамян. О температурных напряжениях в прямоугольных бетонных блоках. Известия АН Арм.ССР, серия ФМЕТ, т. VIII, № 4, 1955.
² В. В. Соколовский. Теории пластичности, 1950.