ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXIII 1953 4

МАТЕМАТИКА

С. А. Маркосян

Достаточные условия существования нескольких предельных циклов

(Представлено А. Л. Шагиняном 28. VIII. 1956)

Условия существования нескольких предельных циклов уравнения нелинейного колебания второго порядка были установлены, например, в работах ([1-3]).

В настоящей заметке приводятся досточные условия существования не менее любого, наперед заданного числа предельных циклов системы уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + by]\Phi(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = [ax + \varphi(y)]F(x, y), \tag{1}$$

где a, $b = \pm 1$, далее, рассматривая частные виды системы (1), устанавливаются условия, при выполнении которых уравнение

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0 \tag{2}$$

имеет не менее любого числа предельных циклов.

В заметке предполагается, что начало координат для рассматриваемых систем единственная особая точка (на всей плоскости) и что правые части рассматриваемых уравнений определены и непрерывны во всей плоскости и удовлетворяют условию Липшица во всякой ограниченной области этой плоскости.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть дана система уравнений (1),
где $b = -1$, $a = 1$,
если:

1) вне отрезков $[D_3, D_1]$, оси x и $[D_2, D_4]$ оси y, заключающих на себе особую точку $x = y = 0$ соответственно. $xf(x) \leqslant 0$, $y\varphi(y) \leqslant 0$, причем во втором соотношении равенство не может выполняться одновременно для двух симметричных значений аргумента относительно оси x;

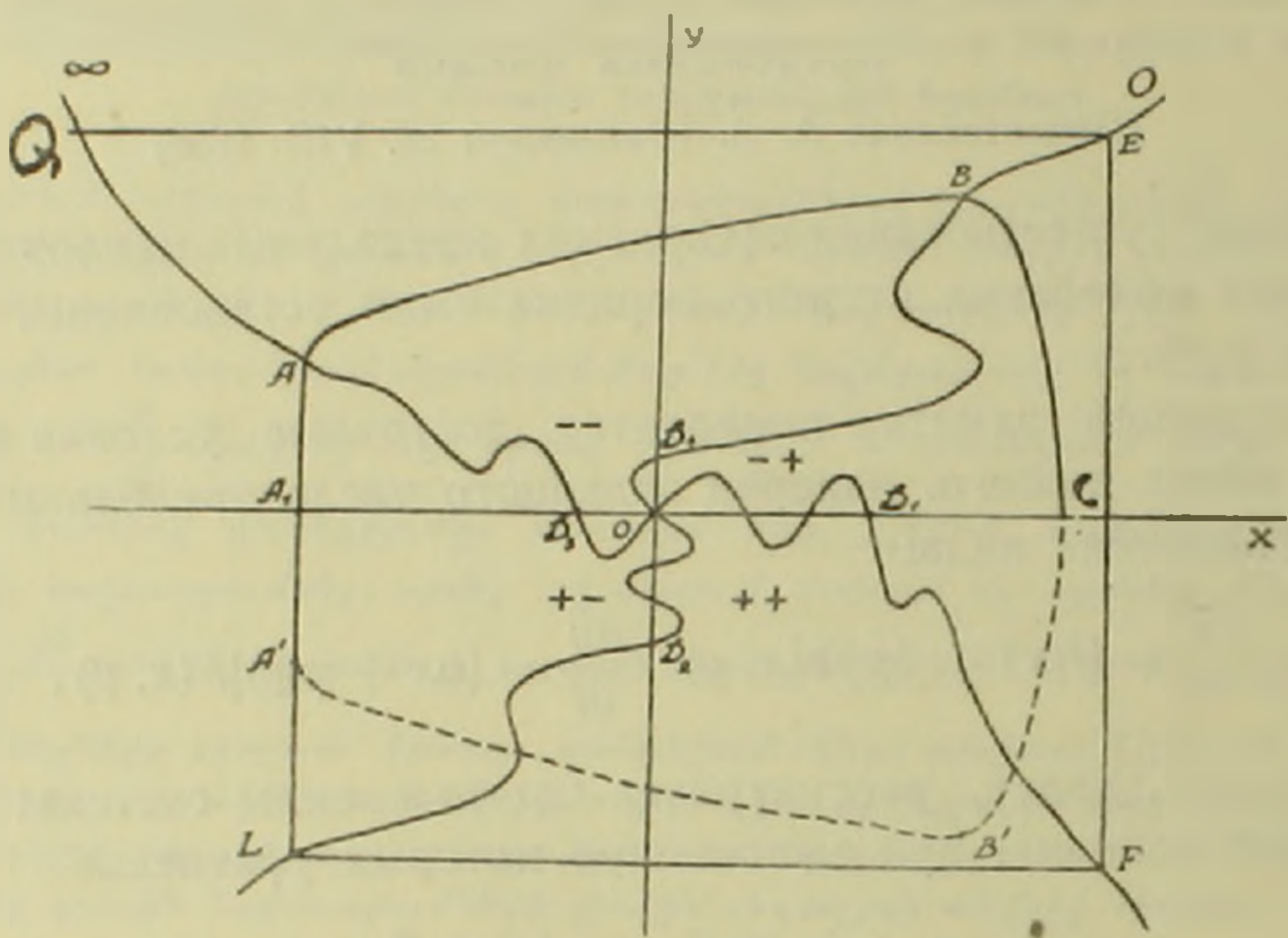
2) существует $\bar{x} > 0$ такое, что $f(x) \leqslant \min(-d_2, -d_4)$ для $x > \bar{x}$, где d_2, d_4, соответственно, расстояние точек D_2, D_4, от начала координат;

3) существует $\tilde{y}$ такое, что $-\varphi(y) > d_1$, когда $y > \tilde{y}$, $-\varphi(y) \leqslant -d_3$, когда $y < -\tilde{y}$, где d_1, d_3, соответственно, расстояния точек D_1, D_3 от начала координат;

4) $\sup\limits_{-\infty < x < 0} f(x) > N = \max(\tilde{y}, \bar{y})$, где $\bar{y}$ наименьшее значение $y \in [D_1, \infty)$, удовлетворяющее уравнению $\bar{x} + \varphi(y) = 0$, если уравнение $\bar{x} + \varphi(y) = 0$ имеет решение; в противном случае в качестве N достаточно выбрать $\tilde{y}$;

5) $\inf\limits_{-\infty < y < 0} [-\varphi(y)] < -\tilde{x}$, где $-\tilde{x}$ — наибольшее из значений $x \in (-\infty, 0)$, удовлетворяющих уравнению $f(x) - N = 0$;

6) $\inf\limits_{0 < x < \infty} [f(x)] < -y^*$, где $-y^*$ — наибольшее из значений $y \in (-\infty, 0)$,



Фиг. 1

удовлетворяющих уравнению $-\tilde{x} + \varphi(y) = 0$;

7) $\sup\limits_{0 < y < \infty} [-\varphi(y)] > x^*$, где x^* — наименьшее значение $x \in (0, \infty)$, удовлеворяющее уравнению $f(x) + y^* = 0$;

8) $x \dfrac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} > x \dfrac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)}$, то для систем (2) можно построить такую замкнутую кривую, которую все и/к* пересекают снаружи внутрь при возрастании t.

Для доказательства леммы, принимая точку $A(-\tilde{x}, N)$ изоклины бесконечности за исходную, проведем отрезки AL, LF, FE и прямую $y = y_E$ (фиг. 1.). Если прямая $y = y_E$ пересекает изоклину бесконечности в точке A или ее точка пересечения Q по изоклине ближе к точке $x = y = 0$, чем точка A, то искомая замкнутая кривая построена. Если же прямая $y = y_E$ не пересекается с изоклиной бесконечности или ее точка пересечения дальше от точки $x = y = 0$, чем точка A, то из точки A проводим и/к в сторону убывания t. При этом продол-

* Выражение „интегральная (—ые) кривая (—ые)" сокращенно будем обозначать через и/к.

жении мы рассматриваем тот случай, когда и/к, не пересекаясь ни с прямой $y = y_E$, ни с отрезком EF, достигает положительной полуоси ox в некоторой точке C (так как в противном случае искомая кривая построена). Отображая фигуру A_1ABC (фиг. 1) относительно оси x, доказывается, что полученная замкнутая кривая $ABCB'A'A$ — искомая.

Замечание. Легко видеть, что при $x^* > \bar{x}$ достаточно требовать выполнение условия 2) на $[\bar{x}, x^*]$, условия 3) на $[\hat{y}, \hat{y}]$, $[-\hat{y}, -\bar{y}]$, где $\hat{y}$ наименьшее значение $y \in [d_4, \infty)$, удовлетворяющее уравнению $x^* + \varphi(y) = 0$, а в противном случае (если $x^* < \bar{x}$) мы получаем тот случай, когда $\hat{y} < N$ и при построении искомой кривой условия 2), 3) не используются.

Заметим также, что выполнения условия 1) достаточно, соответственно, на отрезках

$$[-\tilde{x}, -d_3], \quad [D_1, x^*]; \quad [-y^*, -d_2], \quad [d_4\, \hat{y}].$$

Легко проверить, что заменой x на $-x$, t на $-t$ к лемме *1* приводится

Лемма 2. Если выполняются условия:

1) $xf(x) \geqslant 0$, $y\varphi(y) \geqslant 0$, соответственно, вне отрезков $[D_3, D_1]$ оси x и $D_2, D_4]$ оси y, заключающих на себе особую точку $x = y = 0$, причем; во втором соотношении равенство не может выполняться одновременно для двух симметричных значений аргумента относительно оси x,

2) существует $\bar{x} > 0$ такое, что $f(x) \leqslant \min(-d_2, -d_4)$, когда $x \leqslant -\bar{x}$ где d_2, d_4 расстояние, соответственно точек D_2, D_4 от начала координат;

3) существует $\tilde{y} > 0$ такое, что $-\varphi(y) \leqslant -d_3$, когда $y > \tilde{y}$, $-\varphi(y) \geqslant d_1$, когда $y \leqslant -\tilde{y}$, где d_1, d_3 расстояние, соответственно точек D_1, D_3 от начала координат;

4) $\sup\limits_{0 < x < \infty} f(x) > N = \max(\tilde{y}, \bar{y})$, где $\bar{y}$ наименьшее значение $y \in [d_4, \infty)$, удовлетворяющее уравнению $-\bar{x} + \varphi(y) = 0$, если это уравнение имеет решение; в противном случае в качестве N достаточно выбрать $\tilde{y}$;

5) $\sup\limits_{-\infty < y < 0}[-\varphi(y)] > \tilde{x}$, где $\tilde{x}$ наименьшее значение $x \in (0, \infty)$, удовлетворяющее уравнению $f(x) - N = 0$;

6) $\inf\limits_{-\infty < x < 0}[f(x)] < -y^*$, где $-y^*$ наименьшее значение $y \in (-\infty, 0)$, удовлетворяющее уравнению $\bar{x} + \varphi(y) = 0$;

7) $\inf\limits_{0 < y < \infty}[-\varphi(y)] < -x^*$, где $-x^*$ наибольшее значение $x \in (-\infty, 0)$, удовлетворяющее уравнению $\bar{x} + \varphi(y) = 0$;

8) $x\dfrac{F(x,-|y|)}{\Phi(x,-|y|)} \leqslant x\dfrac{F(x,|y|)}{\Phi(x,|y|)}$, то можно построить замкнутую кривую, содержащую особую точку u, пересекаемую при возрастании t и/к системы уравнений (1) только изнутри к наружи.

Замечание. Легко видеть, что при $-x^* < -\bar{x}$ достаточно выполнение условия 2 на $[-x^*, -\bar{x}]$ и условия 3 на $[\bar{y}, \tilde{y}]$, $[-\hat{y}, -y]$, где $\hat{y}$ наименьшее значение y, удовлетворяющее уравнению $-x^* + \varphi(y) = 0$. При $-x^* > -\bar{x}$ получаем тот случай, когда $\hat{y} < N$; при построении искомой кривой условия 2,3 не используются.

Ниже мы будем пользоваться обозначениями:

$$\bar{x}_i,\ \bar{y}_i,\ \tilde{y}_i,\ x_i^*,\ \hat{y}_i,$$

причем при нечетном и четном i эти величины являются величинами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\tilde{y}$, x^*, $\hat{y}$, соответственно, лемм *1,2*.

Некоторые точки на полуосях обозначим через D_i^k; индекс сверху обозначает полуось, причем нумерация ведется по часовой стрелке, начиная с положительной полуоси ox, а снизу — номер точки на полуосях в порядке возрастания расстояния точек от начала координат. Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть дана система уравнений (1) и в некоторой окрестности начала координат изоклины нуля и бесконечности расположены, соответственно, в квадрантах II, IV и I, III; если существуют 4_n точек D_i^k; $k = 1, 2, 3, 4$; $i = 1, 2 \ldots n$ таких, что для каждого нечетного номера m выполняются условия 1—7 леммы *1*, при $m < n$ и $x_l^* > \bar{x}_l$ *) в следующих предположениях:

а) $[\bar{x}_m, x_m^*] \subset [D_m^1, D_{m+1}^1]$ $[\tilde{y}_m, \hat{y}_m] \subset [D_m^4, D_{m+1}^4]$, $[-\hat{y}_m, -\tilde{y}_m] \subset [D_{m+1}^2, D_m^2]$,

б) условия 4—7 выполняются, соответственно, на отрезках

$$[D_{m+1}^3, D_m^3],\ [D_{m+1}^2, D_m^2],\ D_m^1, [D_{m+1}^1],\ [D_m^4, D_{m+1}^4];$$

условия 3 на отрезках

$$[D_{m+1}^3, D_m^3],\ [D_m^1, D_{m+1}^1],$$

а после каждого четного номера j выполняются условия 1—8 леммы *2*, причем при $j < n$ и $-x_j^* < -\bar{x}_j$ в следующих предположениях:

в) $[-x_j^*, -\bar{x}] \subset [D_{j+1}^3, D_j^3]$, $[\bar{y}_j, \tilde{y}_j] \subset [D_j^1, D_{j+1}^1]$, $[-\hat{y}_j, -y_j] \subset [D_{j+1}^2, D_j^2]$,

г) условия 4—7 выполняются, соответственно, на отрезках

$$[D_j^1, D_{j+1}^1],\ [D_{j+1}^2, D_j^2],\ [D_{j+1}^3, D_j^3],\ [D_j^4, D_{j+1}^4];$$

условие 8 выполняется на отрезках (предполагая, что j принимает и

---

*) При $x_m^* < \bar{x}_m$ приходим к случаю $\hat{y} < N$ (фиг. 1), что и обеспечивает возможность построения замкнутой кривой.

значении o и $D = 0$): $[D^1_{j+1}, D^1_j]$, $[D^1_j, D^1_{j+1}]$, то система (1) имеет не менее n предельных циклов.

Из теоремы 1 при $n = 1$, как следствие, вытекает

Теорема 1-а. Пусть в некоторой окрестности начала координат изоклины нуля и бесконечности расположены, соответственно, в квадрантах II, IV и I, III и $f(z)$, $\varphi(z) \to \pm\infty$, когда $z \to \mp\infty$; если на некотором отрезке оси x, содержащем на себе особую точку $x = y = 0$, выполняется условие

$$x\frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} > x\frac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)},$$

а вне этого или некоторого другого отрезка выполнятся то же соотношение с обратным знаком, то система (1) имеет по крайней мере один предельный цикл.

Существование не менее произвольного числа предельных циклов можно доказать и для некоторых частных видов системы (1), так, например, верна

Теорема 2. Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - y, \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x), \tag{3}$$

если

1) $f(x)$ непрерывная функция и в некоторой окрестности начала координат $xf(x) > 0$;

2) существуют числа $\delta^i_1 > \delta^i_2$; $x^*_i, l_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots n$, $l_k < x^*_k < l_{k+1}$ при $k < n$; $l_n < x^*_n$, такие, что при каждом нечетном i $f(x) < \delta^i_2$, когда $l_i < x < x^*_i$, $f(x) > \delta^i_1$, когда $-x^*_i < x < -l_i$; при каждом четном i $f(x) > \delta^i_1$, когда $l_i < x < x^*_i$, $f(x) < \delta^i_2$, когда $-x^*_i < x < -l_i$;

3) $\varphi(x)$ непрерывная функция $x\varphi(x) > 0$, $x \neq 0$;

$$\int\limits_{-l_i}^{-x^*_i} \varphi(x)dx \geqslant H_i, \quad \int\limits_{l_i}^{x^*_i} \varphi(x)dx \geqslant H_i, \quad \text{где}$$

$$H_i = \frac{1}{2}\left(M^i + \frac{N^i}{K_i} + \bar{\delta}^i\right)^2, \quad K_i = \frac{\delta^i}{l_i}, \quad \delta^i = \delta_1 - \delta^i_2, \quad \bar{\delta}^i = \max(|\delta^i_1|, |\delta^i_2|),$$

$M^i = \max(M^i_1, M^i_2)$; $M^i_1 = \sup\limits_{0<x<l} f(x)$, $-M^i_1 = \inf\limits_{-l<x<0}[f(x)]$ при нечетном i;

$-M^i_1 = \inf[f(x)]$, $M^i_2 = \sup\limits_{-l<x<0} f(x)$ при четном i;

$N^i = \max(N^i_1, N^i_2)$, $N^i_1 = \sup\limits_{0<x<l_i}\varphi(x)$, $N^i_2 = \inf\limits_{-l<x<0}(\varphi)$, то система (1) имеет не менее n предельных циклов.

Заметим, что системе (3) соответствует уравнение нелинейного колебания (2) и если $f(x) = -\int\limits_0^x g(x)dx$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то уравнение (2) имеет не менее n (n указанное в теореме 2 число) предельных циклов.

В заключение искренне благодарю моего учителя профессора В. В. Немыцкого, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Ленинаканский государственный
педагогический институт им. М. Налбандяна

Ս. Ա. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

Մի քանի սահմանային ցիկլերի գոյության բավարար պայմաններ

Մեկից ավելի սահմանային ցիկլերի գոյության պայմաններ բերված են մի շարք աշխատանքներում, ինչպես օրինակ՝ 1—3։

Ներկա ակնարկում այդ հարցը քննարկում է

$$\frac{dx}{dt} = [f(x) + by]\Phi(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = [ax + \varphi(y)]F(x, y) \tag{1}$$

$$(a, b = \pm 1)$$

հավասարումների սիստեմի համար։ Ենթադրվում է, որ $x = y = 0$ կետը (1) սիստեմի համար միակ եզական կետն է և որ առաջին հավասարումների աջ մասերը բավարարում են լուծման գոյության և միակության պայմաններին։

Այս ակնարկի հիմնական թեորեմայում (թեորեմ 1) բերվում են (1) սիստեմի նախապես տված, ցանկացած թվով սահմանային ցիկլերի գոյության բավարար պայմաններ։ Հիմնական թեորեմից որպես հետևանք ստացվում է հետևյալ թեորեմը՝ (1) սիստեմի գոնե մեկ սահմանային ցիկլի գոյության վերաբերյալ։

Թեորեմ 1. Դիցուկ $x = y = 0$ եզական կետի մի որոշ մերձակայքում $x = a\varphi(y)$ և $y = bf(x)$ կորերը գտնվում են համապատասխանաբար 2-րդ, 4-րդ և 1-ին, 3-րդ քառորդներում և $f(z), \varphi(z) \to \pm\infty$, երբ $z \to \pm\infty$, եթե $x = y = 0$ եզական կետը իր վրա պարունակող x առանցքի մի որևէ հատվածի վրա տեղի ունի

$$x\frac{F(x, -|y|)}{\Phi(x, -|y|)} > x\frac{F(x, |y|)}{\Phi(x, |y|)}.$$

պայմանը, իսկ այդ հատվածից կամ այդ հատվածն իր մեջ պարունակող մի որևէ այլ հատվածից դուրս տեղի ունի նույն առնչությունը հակառակ նշանով, ապա (1) սիստեմը ունի գոնե մեկ սահմանային ցիկլ։

Ակնարկում բերվում են նաև ոչ գծային տատանման

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + \varphi(x) = 0 \tag{2}$$

հավասարման, ոչ պակաս քան ցանկացած թվով, սահմանային ցիկլերի գոյության պայմաններ։ Դիտարկելով (2) հավասարմանը համարժեք

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - y; \quad \frac{dy}{dt} = \varphi(x) \quad \left(f(x) = -\int_0^x g(x)dx\right) \tag{3}$$

սիստեմը ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը։

Թեորեմ 2. Դիցուկ տված է (3) սիստեմը, եթե

1) $f(x)$ անընդհատ ֆունկցիա է և $x = y = 0$ կետի մի որևէ մերձակայքում $xf(x) > 0$;

2) Գոյություն ունեն $\xi_1^i > \xi_2^i$; x_i^*, $l_i > 0$, $(i = 1, 2 \ldots n)$ $l_k < x_k^* < l_{k+1}$ երբ $k < n$; $l_n < x_n^*$

թվեր այնպիսին, որ յուրաքանչյուր կենտ i թվի համար $f(x) < \delta_2^i$, երբ $l_i < x < x_i^*$, $f(x) > \delta_1^i$, երբ $-x_i^* < x < -l_i$ յուրաքանչյուր զույգ i թվի համար $f(x) < \delta_1^i$, երբ $l_i < x < x_i^*$ $f(x) < \delta_2^i$, երբ $-x^* < x < -l_i$;

3) $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիա է, $x\varphi(x) > 0$, $x \neq 0$;

$$\int\limits_{-l_i}^{-x_i^*} \varphi(x)dx \geqslant H_i, \quad \int\limits_{l_i}^{x_i^*} \varphi(x)dx \geqslant H_i, \quad \text{որտեղ}$$

$$H_i = \frac{1}{2}\left(M^i + \frac{N^i}{K_i} + \bar{\delta}_i\right)^2, \quad K_i = \frac{\delta^i}{l_i}, \ \delta^i = \delta_1^i - \delta_2^i, \ \bar{\delta}^i = \max(|\delta_1^i|, |\delta_2^i|).$$

$$M^i = \max(M_1^i, M_2^i); \ M_1^i = \sup_{0 < x \leqslant l_i} f(x), - M_2^i = \inf_{-l_i \leqslant x < 0} [f(x)]$$

երբ i կենտ է; $-M_1^i = \inf\limits_{0 < x \leqslant l_i} [f(x)]$, $M_2^i = \sup\limits_{-l_i \leqslant x < 0} f(x)$ երբ i զույգ է։

$$N^i = \max(N_1^i, N_2^i), \ N_1^i = \sup_{0 < x \leqslant l_i} \varphi(x), \ N_2^i = \inf_{-l_i \leqslant x < 0} \varphi(x), \ \text{ապա}$$

(3) սիստեմը ունի ոչ պակաս քան n սահմանային ցիկլ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. I. Eckweiler*, Nonlinear differential equations of the Van der Pol type with a variety of periodic Solutions. Studies in nonlinear vibration theory, New-York University. (1946) 4—64. [2] *Duff, Levinson*, On the non-unigness of peridic solutions for on asymmetric Lienard equations, Quart. appl. math. X, № 1 (1952), [3] *C. C. Рышков*, О режимах работы лампового генератора. ДАН СССР, т. XCVI, № 3, 1954. 921—924.