ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIII 1956 1

ГИДРАВЛИКА

В. Г. Саноян

К теории движения взвешенных наносов

(Представлено И. В. Егиазаровым 12.VI.1956)

Теория движения взвешенных частиц в турбулентном потоке представляет большой, как теоретический, так и прикладной интерес.

Ввиду сложности этого вопроса, исследования по движению взвешенных наносов велись до сих пор, главным образом, экспериментально. За последнее время некоторые исследователи приступили к теоретическому рассмотрению этого вопроса ([1-5]).

Диффузионная теория В. М. Маккавеева ([4]) рассматривает движение взвешенных частиц подобно тому, как обычно рассматривают диффузионные процессы в турбулентном потоке, т. е. принимает, что взвешенные частицы представляют собой субстанцию, переносимую потоком, но неоказывающую обратного влияния на динамику несущего потока.

М. А. Великанов ([5]) в своей гравитационной теории впервые указал на необходимость учета воздействия взвешенных частиц на динамику потока. Основная идея этой теории состоит в том, что энергия, освобожденная при переходе массы неоднородной жидкости с высоких отметок на более низкие отметки, расходуется на преодоление всех сопротивлений, приращение кинетической энергии и на взвешивание наносов. Однако М. А. Великанов энергию, затраченную потоком на взвешивание частиц, включил в уравнение баланса не пульсационной, а осредненной энергии, в то время как взвешивание частиц совершается за счет пульсации скоростей. Поэтому основное уравнение М. А. Великанова не признается правильным.

В работе Г. И. Баренблатта ([6]) вышеуказанная энергия вводится в уравнение баланса пульсационной энергии.

В настоящей статье дается вывод уравнений балансов пульсационной и осредненной энергий несколько иным путем и доказывается, что при известных допущениях в случае плоского движения слагаемое, учитывающее работу взвешивания, аналогично трансформации кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию пульсации, входит в вышеупомянутые уравнения с противоположными знаками. Это обстоятельство соответствует схеме, приведенной в работе А. Н. Колмогорова [7].

Напишем уравнение количества движения, уравнение баланса массы и уравнение неразрывности двухфазной жидкости в предположении о малости относительного объема взвешенных частиц и малости ускорений потока сравнительно с ускорением силы тяжести [6]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\partial V_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho_\partial V_i V_\alpha) = -\frac{\partial p}{\partial x_\partial} + \frac{\partial \tau_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} - \rho_\partial g_i, \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_\partial}{\partial t} + \frac{\partial \rho_\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{2}$$

$$\frac{\partial V_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \tag{3}$$

При выводе этих уравнений принята прямоугольная система координат x_1, x_2, x_3, ось x_3 направлена вертикально вверх. Обозначения следующие:

$\rho_\partial = \rho(1-s) + \rho_s s$ — плотность неоднородной жидкости, где, ρ и ρ_s плотности соответственно жидкой и твердой фаз, s — относительное содержание взвешенных частиц (мутность), V — скорость, p — давление, τ — тензор вязких напряжений неоднородной жидкости, g — ускорение силы тяжести.

В вышеприведенных формулах и далее предполагается суммирование по повторяющимся греческим индексам от единицы до трех.

В силу малости объема взвешенных частиц везде кроме члена с множителем g можно производить замену $\rho_\partial \approx \rho$. Тогда уравнение (1) запишется в следующем виде:

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho V_i V_\alpha) = -\rho_\partial g - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}, \tag{4}$$

осреднение которого даст:

$$\rho\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \overline{V_i V_\alpha}) = -\frac{\partial \rho(\overline{V_i' V_\alpha'})}{\partial x_\alpha} - \bar{\rho}_\partial g - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{\alpha i}}}{\partial x_\alpha} \tag{4'}$$

или

$$\rho\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \bar{V}_i \bar{V}_\alpha + \rho \overline{V_\alpha' V_i'} - \bar{\tau}_{\alpha i}) - \bar{\rho}_\partial g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{5}$$

Помножим уравнения (5) осредненного движения соответственно на $\bar{V}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Тогда, пользуясь уравнениями (2), (3), для отдельных членов будем иметь выражения:

$$\rho\bar{V}_i\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial \rho \bar{V}_i^2}{\partial t}; \quad \bar{V}_i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho \bar{V}_i \bar{V}_\alpha) = \bar{V}_i\left(\bar{V}_\alpha\frac{\partial \rho \bar{V}_i}{\partial x_\alpha} + V_i\frac{\partial \rho \bar{V}_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\bar{V}_\alpha\frac{\partial \rho \bar{V}_i^2}{\partial x_\alpha};$$

$$\overline{V}_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho \overline{V'_\alpha V'_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{V}_i \overline{V'_\alpha V'_i}\right) - \overline{V'_\alpha V'_i}\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha};\quad \overline{V}_i \frac{\partial \overline{\tau}_{\alpha i}}{\partial x_\alpha} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V}_i \overline{\tau}_{\alpha i} - \overline{\tau}_{\alpha i}\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_\alpha} \quad \text{и т. д.}$$

Складывая полученные результаты ($i = 1, 2, 3$) и полагая $E_0 = \rho \sum_{i=1}^{3} \frac{\overline{V}_i^2}{2}$, получим:

$$\frac{dE_0}{dt} = \left(\frac{\partial E_0}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial E_0}{\partial x_\alpha}\right) = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\overline{V}_\beta\left(\rho \overline{V'_\alpha V'_\beta} - \overline{\tau}_{\alpha\beta}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \overline{\tau}_{\alpha\beta}\frac{\partial \overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V}_\beta \overline{p} - \left(\rho \overline{V'_\alpha V'_\beta}\frac{\partial \overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha} - \overline{V}_3 \rho_\partial g\right)\right\}. \tag{6}$$

Мы получили уравнения энергии для осредненного движения.

Для получения уравнения энергии пульсационного движения вычитаем почленно уравнение (4′) из (4), в результате получаем:

$$\rho \frac{\partial V'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho V_i V_\alpha - \rho \overline{V}_i \overline{V}_\alpha\right) = -\rho'_\partial g_i - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho \overline{V'_i V'_\alpha}\right) + \frac{\partial \tau'_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}$$

или, замечая что

$$V_i V_\alpha - \left(\overline{V}_\alpha \overline{V}_i + \overline{V'_i V'_\alpha}\right) = \left(\overline{V}_i V'_\alpha + \overline{V}_\alpha V'_i\right) + \left(V'_i V'_\alpha - \overline{V'_\alpha V'_i}\right),$$

будем иметь:

$$\rho \frac{\partial V'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\rho\left[\left(\overline{V}_i V'_\alpha + \overline{V}_\alpha V'_i\right) + \left(V'_i V'_\alpha - \overline{V'_i V'_\alpha}\right)\right] =$$

$$= -\rho'_\partial g_i - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau'_{\alpha i}}{\partial x_\alpha}. \tag{7}$$

Умножая уравнение (7) для пульсационного движения соответственно на $V'_i (i = 1, 2, 3)$ и складывая результаты умножения, получаем уравнение энергии для пульсационного движения.

Для того, чтобы сравнить это уравнение с уравнением энергии осредненного движения (6), отнесем их к одному и тому же объему, перемещающемуся со средней скоростью потока. Тогда, обозначая

$$E' = \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{3} V_i'^2,$$

получим:

$$\frac{dE'}{dt} = \frac{\partial E'}{\partial t} + \overline{V}_\alpha \frac{\partial E'}{\partial x_\alpha} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha} V'_\beta\left(\rho V'_\alpha V'_\beta - \tau'_{\alpha\beta}\right) + \tau'_{\alpha\beta}\frac{\partial V'_\beta}{\partial x_\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_\beta} V'_\beta p' - \rho V'_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V'_\alpha V'_\beta} + \left(\rho V'_\alpha V'_\beta \frac{\partial \overline{V}_\beta}{\partial x_\alpha} + V'_3 \rho'_\partial g\right)\right\}. \tag{8}$$

Осреднение этого уравнения дает:

$$\frac{d\overline{E'}}{dt} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\overline{V'_\beta(\rho V'_\alpha V'_\beta - \tau'_{\alpha\beta})} + \overline{\tau'_{\alpha\beta}\frac{\partial V'_\beta}{\partial x_\alpha}} + \frac{\partial}{\partial x_\beta}\overline{V'_\beta p'} + \right.$$

$$\left. + \left(\rho\overline{V'_\alpha V'_\beta}\frac{\partial \overline{V_\beta}}{\partial x_\alpha} + \overline{V'_3 \rho'_\partial g}\right)\right\}. \tag{9}$$

Скорость изменения полной кинетической энергии потока получится, если сложить скорости изменения энергий осредненного (6) и пульсационного движений (9).

Рассмотрим частный случай движения неоднородной жидкости, когда имеется плоский поток, в среднем стационарный и однородный по горизонтали.

В этом случае уравнение сохранения массы (2) примет вид

$$\frac{d}{dx_3}\left(\rho_\partial V_3\right) = 0. \tag{10}$$

Отсюда после интегрирования получим

$$\rho_\partial V_3 = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Положив константу интегрирования равной нулю (так как средний поток вещества по вертикали равен нулю), получим из (11) после осреднения

$$\overline{\rho_\partial}\,\overline{V_3} = -\overline{\rho'_\partial V'_3}. \tag{12}$$

Равенство (12) показывает, что в случае плоского потока неоднородной жидкости, в среднем стационарного и однородного по горизонтали, члены, стоящие в круглых скобках уравнений (6) и (9), равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку. При сложении уравнений энергии (6) и (9) они выпадут из уравнения полной энергии. Эти члены выражают превращение кинетической энергии осредненного движения в энергию частично пульсации, частично в энергию для поддержания взвешенных частиц. Этот вывод находится в согласии со схемой, приведенной в работе ([7]).

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Վ. Գ. ՍԱՆՈՅԱՆ

Կախված ջրաբերուկների տեսության շուրջ

Հոդվածում արտածվում է անհամասեռ հեղուկի էներգետիկական հավասարումները միջին և պուլսացիոն շարժումների համար, որոնք արտահայտվում են համապատասխանաբար (6) և (9) հավասարումներով։

Ջրաբերուկների տեղափոխման համար անհրաժեշտ էներգիան վերոհիշյալ բանաձևերում ներկայացվում է հավասարությունների աջ մասերում գտնվող վերջին անդամներով։ Մասնավոր դեպքում երբ ունենք հարթ և հաստատված շարժում, (6), (9) հավասարումների աջ մասի կլոր փակագծերում գտնվող արտահայտությունները դառնում են իրար հավասար հակառակ նշաններով։ Այդ նշանակում է, որ լրիվ էներգիայի հավասարման (որը կստացվի միջին և պուլսացիոն շարժումների էներգիաների գումարումից) մեջ վերոհիշյալ անդամները չեն մտնի։ Ուրիշ խոսքով՝ ջրաբերուկների առկայության դեպքում միջին էներգիայի մի մասը ծախսվում է ջրաբերուկների տեղափոխման համար և ապա մնացած մասը՝ պուլսացիայի։ (Համասեռ հեղուկի դեպքում վերոհիշյալ անդամները ներկայացնում են էներգիայի տրանսֆորմացիան միջին շարժումից պուլսացիոն շարժման)։

Այս եզրակացությունը համընկնում է ([7]) աշխատանքում բերված սխեմայի հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1951; № 2, 6, 8, 9, 11, 12. 1952. [2] *Ф. И. Франкль*, ДАН СССР, 92, № 8, 1953. [3] *Ф. И. Франкль*, ДАН СССР, 102, № 5. 1955. [4] *В. М. Маккавеев*, Изв. ГГИ, № 32, 1931. [5] *М. А. Великанов*, Движение наносов, 1948. [6] *Г. И. Баренблатт*, ПММ, т. XVII, в. 3, 1953. [7] *А. Н. Колмогоров*, Вестн. московск. университета, № 3, 1954.