ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIII 1956 1

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Теоремы о суммировании производных разложений в обычный и обобщенный интеграл Фурье

(Представлено А. Л. Шагиняном 3.IV.1956)

1. В опубликованной ранее работе ([1]) нами были доказаны теоремы о равной суммируемости производных разложения функции с интегрируемым квадратом по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам. Из этих теорем можно получить теоремы суммирования производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля к значению соответствующих производных функций. Для этого необходимо иметь соответствующие теоремы суммирования производных разложения в обычный интеграл Фурье. В связи с этим, в работе ([1]) мы сформулировали теорему (см. теорему 5) о суммировании по методу Чезаро первой производной обычного ряда Фурье. Однако, по нашей вине, в формулировке этой теоремы содержится ошибка.

В настоящей заметке мы докажем теоремы о суммировании производных разложения в обычный интеграл Фурье и в силу теорем 4 и 7 работы ([1]) сформулируем соответствующие теоремы о суммировании по методу М. Рисса производных разложения по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля.

2. Относительно суммирования первой производной обычного ряда Фурье известна теорема Л. Фейера-А. Лебега (см., например, [2]). При помощи метода Б. М. Левитана дадим новое доказательство этой теоремы.

Теорема 1. Пусть $F[f(x)]$ означает обычный ряд Фурье функции $f(x)$. Ряд $F'[f(x)]$ суммируем по методу М. Рисса первого порядка к значению $f'(x_0)$, если в точке x_0 удовлетворяются следующие условия:* 1) *в некоторой окрестности точки x_0 $f'(x)$ существует и суммируема*; 2) *в точке x_0 $f'(x)$ — непрерывна**.*

Доказательство. Пусть $f'(x)$ существует и суммируема в интервале $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $(\delta>0)$. Далее, пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность гладких функций, определенных на интервале $(0,2\pi)$ и схо-

* Эта теорема более общая, чем теорема Л. Фейера-А. Лебега.

** Из доказательства будет видно, что теорема верна и при предположении, что x_0—точка Лебега функции $f(x)$.

дящихся в среднем к функции $f(x)$. В силу гладкости функций $f_n(x)$ имеем

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\}, \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

где $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ коэффициенты Фурье функции $f_n(x)$, причем ряды (1) сходятся равномерно.

Пусть t произвольное действительное число $|t| < \delta/_2$. Тогда из (1) следует

$$\frac{1}{2}\{f_n(x+t) + f_n(x-t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \cos kt, \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

Обозначим через $g_\varepsilon(t)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $g_\varepsilon(t)$ четна, т. е. $g_\varepsilon(-t) = g_\varepsilon(t)$,
2) $g_\varepsilon(t)$ обращается в нуль вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$,
3) $g_\varepsilon(t)$ имеет непрерывную вторую производную.

Пусть $\psi_\varepsilon(\mu)$ cos — преобразование Фурье функции $g_\varepsilon(t)$, т. е.

$$\psi_\varepsilon(\mu) = \int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(t) \cos \mu t \, dt. \tag{3}$$

В силу условия 3 при $\mu \to \infty$ имеет место оценка

$$\psi_\varepsilon(\mu) = O\left(\frac{1}{\mu^2}\right). \tag{4}$$

Помножим обе части равенства (2) на $g_\varepsilon(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до ε. Тогда в силу (3), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varepsilon} \{f_n(x+t) + f_n(x-t)\} g_\varepsilon(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\} \psi_\varepsilon(k),$$
$$(n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$S_n(x, \mu) = \sum_{k<\mu} \{a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx\}, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда равенства (5) примут вид.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu S_n(x, \mu) = \int_0^{\varepsilon} \{f_n(x+t) + f_n(x-t)\} g_\varepsilon(t) dt, \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ позволяет перейти к пределу под знаком интеграла в правой части (6), а оценка (4) обеспечивает сходимость последовательности $\{S_n(x, \mu)$ к функции

$$S(x, \mu) = \sum_{k<\mu} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\},$$

где a_k и b_k коэффициенты Фурье функции $f(x)$. Итак, переходя к пределу в равенстве (6), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu S(x, \mu) = \int_0^\varepsilon \{f(x+t) + f(x-t)\} g_\varepsilon(t) dt. \qquad (7)$$

Дифференцируя равенство (7) по x для $x \in (x_0 - \delta/2, x_0 + \delta/2)$, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} = \int_0^\varepsilon \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} g_\varepsilon(t) dt. \qquad (8)$$

Положим

$$\alpha(x, \mu) = \int_0^\varepsilon \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} \cos \mu t dt. \qquad (9)$$

В силу равенства Парсеваля для обычных интегралов Фурье из (3) и (9) следует

$$\int_0^\varepsilon \{f'_x(x+t) + f'_x(x-t)\} g_\varepsilon(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \alpha(x, \mu) \psi_\varepsilon(\mu) d\mu. \qquad (10)$$

Из (8) и (10) и четности функций $\alpha(x, \mu)$ и $\psi_\varepsilon(\mu)$ следует

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(\mu) d_\mu \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu \right\} = 0. \qquad (11)$$

В силу определений функций $S(x, \mu)$ и $\alpha(x, \mu)$, при $a \to \infty$ справедливы оценки:

$$\operatorname*{V}_a^{a+1} \left\{ \frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} \right\} = o(a), \qquad \operatorname*{V}_a^{a+1} \left\{ \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu \right\} = o(1). \qquad (12)$$

В силу оценок (12) применима одна тауберова теорема В. М. Левитана (см. теорему 3.2.2 работы [3]), согласно которой из формулы (11) следует, что средние по М. Риссу первого порядка функции

$$\frac{\partial S(x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \alpha(x, \nu) d\nu$$

стремятся к нулю равномерно в интервале $(x_0 - \delta/2,\ x_0 + \delta/2)$, т. е.

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)d_\nu\left\{\frac{\partial S(x,\ \nu)}{\partial x}-\frac{1}{\pi}\int_0^\nu \alpha(x,\ \sigma)d\sigma\right\}=0$$

или

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)d_\nu\frac{\partial S(x,\ \nu)}{\partial x}=\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha x(,\ \nu)d\nu.$$

Для доказательства теоремы необходимо доказать справедливость равенства:

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha(x_0,\ \nu)d\nu=f'(x_0).$$

В силу определения функции $\alpha(x,\ \nu)$, мы имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha\,(x_0,\ \nu)d\nu=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\left\{\int_0^\varepsilon[f'_x(x_0+t)+f'_x(x_0-t)]\cos\nu t\,dt\right\}d\nu.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha\,(x_0,\ \nu)d\nu=\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left\{f'_x(x_0+t)+f'_x(x_0-t)\right\}\left[\int_0^\mu\left(1-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\cos\nu t\,d\nu\right]dt. \qquad (13)$$

Как известно (см. [4], стр. 234),

$$\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\cos\nu t\,dt=\sqrt{2\pi}\,\mu\frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}. \qquad (14)$$

Тогда из (13) и (14) мы получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha(x_0,\ \nu)d\nu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\int_0^\varepsilon\left\{f'_x(x_0+t)+f'_x(x_0-t)\right\}\frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}dt. \qquad (15)$$

Преобразуем интеграл в правой части (15) следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\mu\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha(x_0,\ \nu)d\nu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\int_0^\varepsilon\left\{f'_x(x_0+t)+f'_x(x_0-t)-\right.$$

$$-2f'(x_0)\Big\}\frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}\,dt+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mu f'(x_0)\int\limits_0^t\frac{I_{3/2}(\mu t)}{(\mu t)^{3/2}}\,dt. \tag{16}$$

Заменой переменной в интегралах правой части равенства (16) приведем его к виду:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha(x_0,\ \nu)\,d\nu=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\varepsilon\mu}\Big\{f'_x\left(x_0+\frac{z}{\mu}\right)+f_x\left(x_0-\frac{z}{\mu}\right)-$$

$$-2f'(x_0)\Big\}\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}pz+2\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(x_0)\int\limits_0^{\varepsilon\mu}\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz. \tag{17}$$

Оценим при больших μ первый интеграл в правой части (17).

Обозначим через α произвольное положительное число и положим

$$\int\limits_0^{\varepsilon\mu}\Big\{f'_x\left(x_0+\frac{z}{\mu}\right)+f'_x\left(x_0-\frac{z}{\mu}\right)-2f'(x_0)\Big\}\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz=$$

$$=\left\{\int\limits_0^{a}+\int\limits_a^{\varepsilon\mu}\right\}\left[f'_x\left(x_0+\frac{z}{\mu}\right)+f'_x\left(x_0-\frac{z}{\mu}\right)-2f'(x_0)\right]\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz=I_1+I_2. \tag{18}$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, каково бы ни было число $\delta>0$, можно подобрать число μ_0 настолько большим, что для всех $\mu>\mu_0$ будет выполняться неравенство

$$|I_1|<\delta/2. \tag{19}$$

С другой стороны, выбрав a достаточно большим, мы добемься неравенства

$$|I_2|<\delta/2. \tag{20}$$

Из оценок (19) и (20) и произвольности числа δ следует равенство

$$\lim_{\mu\to\infty}\int\limits_0^{\varepsilon\mu}\Big\{f'_x\left(x_0+\frac{z}{\mu}\right)+f'_x\left(x_0-\frac{z}{\mu}\right)-2f'(x_0)\Big\}\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz=0. \tag{21}$$

Переходя в равенстве (16) к пределу, в силу (21), получим

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to\infty}\int\limits_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\alpha(x_0,\ \nu)\,d\nu=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(x_0)\int\limits_0^{\infty}\frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz. \tag{22}$$

Согласно известной формуле (см. ([5]), стр. 428)

$$\int\limits_0^\infty \frac{I_{3/2}(z)}{z^{3/2}}\,dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

что с (22) дает равенство

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to\infty}\int\limits_0^\mu \left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)(\alpha x_0,\ \nu)\,d\nu = f'(x_0).$$

чем и доказывается теорема.

В силу эквивалентности методов суммирования первого порядка по Чезаро и М. Риссу, из доказанной теоремы следует теорема Л. Фейера - А. Лебега.

В точности таким же образом доказывается.

Теорема 2. Ряд $F^{(k)}\{f(x)\}$ *суммируем по М. Риссу k-го порядка к значению* $f^{(k)}(x)$ *в точке* x_0, *если удовлетворяются следующие условия:*

1) *в некоторой окрестности точки* x_0 $f^{(k)}(x)$ *существует и суммируема.*

2) *в точке* x_0 $f^{(k)}(x)$ *непрерывна.*

Нетрудно видеть из доказательства, что теоремы 1 и 2 при тех же предположениях верны и для обычных интегралов Фурье.

Приведем формулировку этих теорем для любой производной.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) $f(x) \subset L_2(0,\ \infty)$,

2) *в некоторой окрестности точки* x_0 $f^{(k)}(x)$ *существует и суммируема*;

3) *в точке* x_0 $f^{(k)}(x)$ *непрерывна.*

Тогда производная k-го порядка разложения функции $f(x)$ *в обычный интеграл Фурье в точке* x_0 *суммируема по М. Риссу k-го порядка к значению* $f^{(k)}(x_0)$.

3. Рассмотрим задачу:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0, \tag{I}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \tag{II}$$

Предположим, что функция $q(x)$ действительна, определена на полупрямой $(0,\ \infty)$ и суммируема в каждом конечном интервале. Далее, предположим, что спектр задачи (I)—(II) неотрицателен. Пусть $\lambda = \mu^2$, $(\lambda > 0)$. Обозначим через $\varphi(x,\ \mu)$ решение уравнения (I), удовлетворяющее начальным условиям (II).

В работе ([1]) нами была доказана следующая теорема о равной суммируемости производных разложения функции с интегрируемым квадратом по собственным функциям задачи (I)—(II) и разложения в обычный интеграл Фурье:

Теорема 4. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую k-ю производную и $f(x) \subset L_2(0, \infty)$, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu \to \infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu \left\{ \frac{\partial^k S(x, \nu)}{\partial x^k} - \frac{\partial^k S^*(x, \nu)}{\partial x^k} \right\} = 0,$$

где функции $S(x, \mu)$ и $S^*(x, \mu)$, соответственно, разложения функции $f(x)$ в обобщенный интеграл Фурье и в обычный интеграл Фурье.

Из теорем 3 и 4 следует следующая

Теорема 5. Пусть функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую k-ю производную и выполнены следующие условия:

1) $f(x) \subset L_2(0, \infty)$,

2) *в некоторой окрестности точки x_0 $f^{(k)}(x)$ существует и суммируема,*

3) *в точке x_0 $f^{(k)}(x)$ непрерывна.*

Тогда производная k-го порядка разложения функции $f(x)$ по собственным функциям оператора Штурма-Лиувилля в точке x_0 суммируема по методу М. Рисса k-го порядка к значению $f^{(k)}(x_0)$.

В заключение искренне благодарю моего учителя проф. Б. М. Левитана, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Թեորեմներ ըստ Ֆուրյեի սովորական և ընդհանրացված ինտեգրալների վերլուծությունների ածանցյալների ընդհանրացված գումարների մասին

Հոդվածում ապացուցվում են թեորեմներ ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության ածանցյալների ընդհանրացված գումարների մասին։ Այնուհետև, (1) աշխատանքի 7 թեորեմայի հիման վրա ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ. Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \qquad (0 < x < \infty), \tag{1}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \tag{2}$$

որը հաճախ անվանում են Շտուրմ-Լիուվիլլի խնդիր։

Եթե $q(x)$ ֆունկցիան ամեն մի վերջավոր ինտերվալում ունի հանրագումարելի k-րդ կարգի ածանցյալ և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները՝

1) $f(x) \subset L_2(0, \infty)$,

2) x_0 կետի որևէ շրջակայքում $f^{(k)}(x)$ գոյություն ունի և հանրագումարելի է,

3) x_0 կետում $f^{(k)}(x)$ անընդհատ է,

ապա $f(x)$ ֆունկցիայի ըստ Շտուրմ-Լիուվիլլի օպերատորի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության k-րդ ածանցյալի Մ. Ռիսսի k-րդ կարգի ընդհանրացված գումարը x_0 կետում հավասար է $f^{(k)}(x_0)$.

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Саргсян*, ДАН СССР, т. 104, 6, 1955, 821—824. [2] *И. П. Натансон*, Теория функций вещественной переменной, М.-Л., 1950. [3] *Б. М. Левитан*, Мат. сборник, т. 35(77); 2, 1954, 267 316. [4] *Е. Тытчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.-Л., 1948. [5] *Г. Ватсон*, Теория Бесселевых функций, Гостехиздат, М.-Л., 1949.