ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXII 1956 5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

Об одном решении задачи Дирихле для некоторых полигональных областей

(Представлено А. Л. Шагиняном 24.I.1955)

В теплопроводности, теории упругости и т. п. нередко приходится сталкиваться с необходимостью решения задачи Дирихле в полигональных областях, образующих прямые углы. Попытка построения эффективного решения задачи кручения призматических стержней с полигональным поперечным сечением была дана в работе А. С. Боженко([1]). Однако в последней задача сводится к нерегулярной бесконечной системе линейных уравнений, что не дает возможности получения решений этой системы.

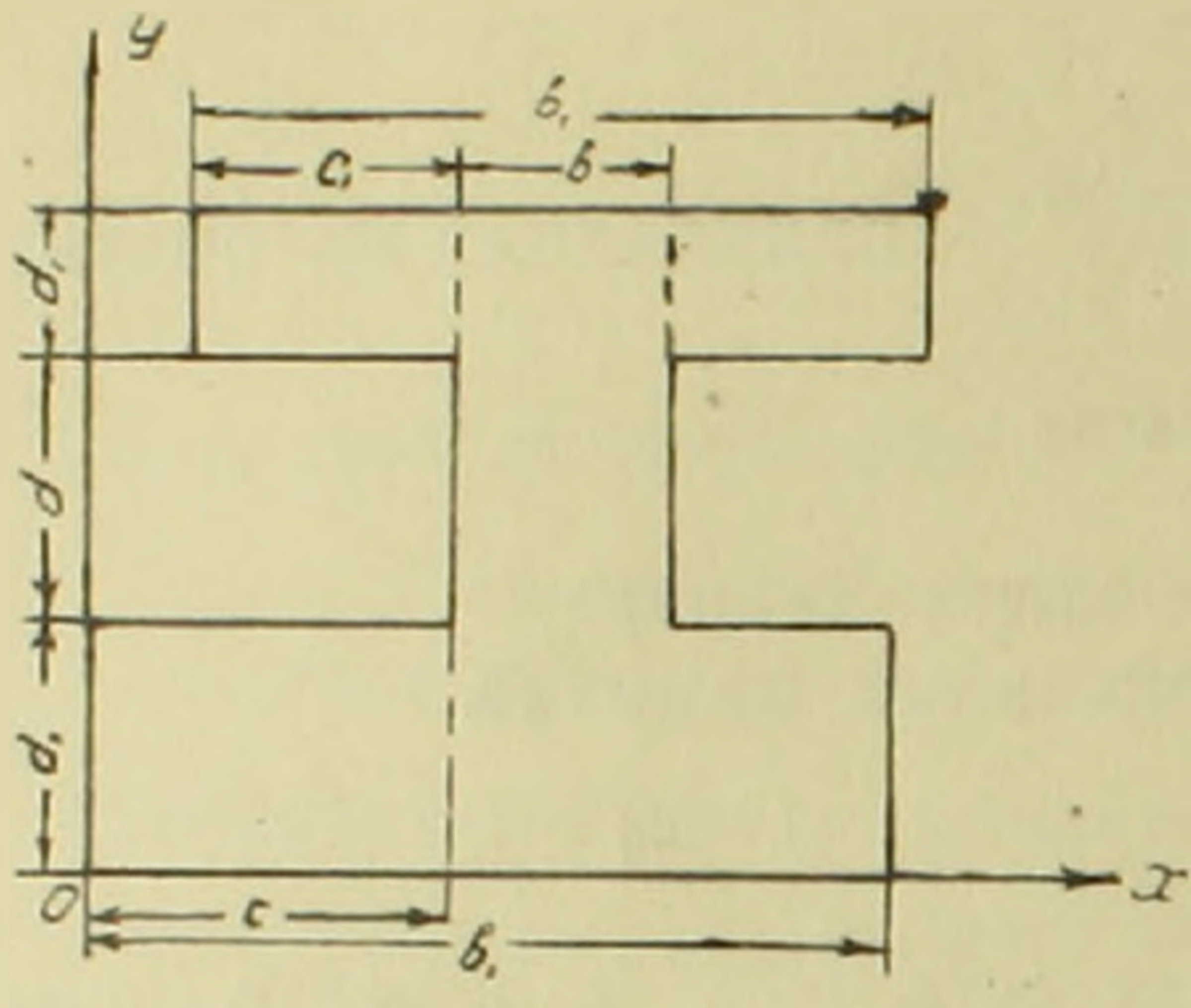
Эффективное решение задачи кручения призматических стержней с поперечным сечением в виде уголка было дано Н. Х. Арутюняном ([2]), предложившим метод наложения вспомогательных функций. Сущность этого метода заключается в том, что продолжением сторон область уголка разбивается на два пересекающихся прямоугольника. В каждом из них решение ищется в виде суммы двух функций, одна из которых (вспомогательная) определена в пересечении областей и удовлетворяет условиям гладкости внутри данного прямоугольника и условиям сопряжения на линии раздела. Посредством наложения вспомогательных функций удается свести задачу, решение которой ищется в виде ряда Фурье, к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. Дальнейшее развитие этого метода было дано в работах ([3,4]). С помощью этого метода, а также его дальнейшего развития, были решены различные краевые задачи для ряда областей, в основном имеющих одну или две оси симметрии. Построение же решения в несимметричных областях или в случае несимметричных граничных условий посредством метода наложения приводит к довольно большому числу разбиений и вспомогательных функций.

В настоящей заметке дается упрощенный способ решения задачи Дирихле для полигональной области довольно общего вида путем ее разбиения на минимальное число прямоугольников, решение в которых ищется в виде рядов Фурье.

Пусть функция $U(x, y)$ удовлетворяет в области, указанной на фиг. 1, уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = Q(x, y) \tag{1}$$

и граничным условиям



Фиг. 1.

$$\begin{gathered}
U(0, y) = T_0(y), \ U(b_0, y) = T(y); \\
(y \leqslant d_0) \\
U(c, y) = T_1(y), \ U(c+b, y) = T_2(y); \\
(d_0 \leqslant y \leqslant d_0 + d) \\
U(c - c_1, y) = T_3(y); \\
U(b_1 + c - c_1, y) = T_k(y); \\
(y \geqslant d_0 + d) \\
U(x, 0) = S_0(x); \\
U(x, d_0) = S(x); \ U(x, d_0 + d) = S_1(x); \\
U(x, d_0 + d + d_1) = S_2(x); \\
(\text{при } x \leqslant c \quad \text{и} \quad x \geqslant c + b)
\end{gathered} \tag{2}$$

Относительно функции $Q(x, y)$ предполагаем, что она суммируема, что касается граничных функций $S_i(x)$ и $T_i(y)$, то предполагаем, что они кусочно непрерывны и почти всюду обладают суммируемой производной.

Для построения решения разобьем рассматриваемую область прямыми $y = d_0$ и $y = d_0 + d$ на три прямоугольника и представим функцию в виде

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & \text{при} \quad y \leqslant d_0, \\ U_2(x, y) & \text{при} \quad d_0 \leqslant y \leqslant d_0 + d, \\ U_3(x, y) & \text{при} \quad y \geqslant d_0 + d. \end{cases} \tag{3}$$

Функции $U_i(x, y)$ удовлетворяют уравнению (1), соответствующим граничным условиям (2), а также условиям сопряжения на линиях раздела:

$$\begin{gathered}
U_1(x, d_0) = U_2(x, d_0); \quad U_2(x, d_0 + d) = U_3(x, d_0 + d); \\
\left.\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y}\right|_{y=d_0} = \left.\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y}\right|_{y=d_0}; \\
\left.\frac{\partial U_2(x, y)}{\partial y}\right|_{y=d_0+d} = \left.\frac{\partial U_3(x, y)}{\partial y}\right|_{y=d_0+d}.
\end{gathered} \tag{4}$$

Следуя идее Г. А. Гринберга [5], ищем функцию $U_1(x, y)$ так же, как и при однородных граничных условиях:

$$U_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \alpha_k y, \tag{5}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{d_0}, \quad f_k(x) = \frac{2}{d_0} \int_0^{d_0} U_1(x, y) \sin \alpha_k y \, dy.$$

Для определения $f_k(x)$ умножим оператор Лапласа от функции $U_1(x, y)$ на $\frac{2}{d_0}\sin\alpha_k y dy$ и, проинтегрировав от 0 до d_0, получим, принимая во внимание (1) и (2),

$$f_k''(x)-\alpha_k^2 f_k(x)-\frac{2\alpha_k}{d_0}[(-1)^k S(x)-S_0(x)]=\frac{2}{d_0}\int_0^{d_0} Q(x, y)\sin\alpha_k y dy. \tag{6}$$

Здесь через $S(x)$ обозначено граничное значение функции $U_1(x, y)$, заданное на отрезках $[0, c]$, $[c+b, b_0]$ и неизвестное в $(c, c+b)$.

Решая уравнение (6), а также удовлетворяя граничным условиям, для $f_k(x)$ получим следующее выражение:

$$f_k(x)=\frac{2\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-x)}{d_0\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\left\{\int_0^{d_0} T_0(y)\sin\alpha_k y dy-\int_0^x\left[(-1)^k S(t)-S_0(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\alpha_k}\int_0^{d_0} Q(t, y)\sin\alpha_k y dy\right]\operatorname{sh}\alpha_k t dt\right\}+\frac{2\operatorname{sh}\alpha_k x}{d_0\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\left\{\int_0^{d_0} T(y)\sin\alpha_k y dy-\right.$$

$$\left.-\int_0^{b_0}\left[(-1)^k S(t)-S_0(t)+\frac{1}{\alpha_k}\int_0^{d_0} Q(t, y)\sin\alpha_k y dy\right]\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-t)dt\right\}. \tag{7}$$

Представим далее функции $U_2(x, y)$ и $U_3(x, y)$ в виде рядов Фурье:

$$U_2(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\sin\beta_k(y-d_0);\quad U_3(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\sin\gamma_k(y-d_0-d), \tag{8}$$

где

$$\beta_k=\frac{k\pi}{d},\ \gamma_k=\frac{k\pi}{d_1},\ \varphi_k(x)=\frac{2}{d}\int_{d_0}^{d_0+d} U_2(x, y)\sin\beta_k(y-d_0)dy,$$

$$\psi_k(x)=\frac{2}{d_1}\int_{d_0+d}^{d_0+d+d_1} U_3(x,y)\sin\gamma_k(y-d_0-d)dy.$$

Поступая аналогично предыдущему и принимая во внимание первую группу условий (4), для $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ получим дифференциальные уравнения:

$$\varphi_k''(x)-\beta_k^2\varphi_k(x)-\frac{2\beta_k}{d}[(-1)^k S_1(x)-S(x)]=\frac{2}{d}\int_0^d Q(x,y+d_0)\sin\beta_k y dy,$$

$$\psi_k''(x) - \gamma_k^2\psi_k(x) - \frac{2\gamma_k}{d_1}\left[(-1)^k S_2(x) - S_1(x)\right] = \frac{2}{d_1}\int_0^{d_1} Q(x, y + d_0 + d)\sin\gamma_k y dy. \tag{9}$$

Здесь через $S_1(x)$ обозначено значение $U(x, d_0 + d)$ в промежутке $[c - c_1, b_1 + c - c_1]$.

Решая уравнения (9) и удовлетворяя соответствующим граничным условиям, для $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ будем иметь

$$\varphi_k(x) = -\frac{2\operatorname{sh}\beta_k(b + c - x)}{d\operatorname{sh}\beta_k b}\left\{\int_0^d T_1(y + d_0)\sin\beta_k y dy - \int_0^x \left[(-1)^k S_1(t) - S(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\beta_k}\int_0^d Q(t, y + d_0)\sin\beta_k y dy\right]\operatorname{sh}\beta_k t dt\right\} + \frac{2\operatorname{sh}\beta_k(x - c)}{d\operatorname{sh}\beta_k b}\left\{\int_0^d T_2(y + \right.$$

$$+ d_0)\sin\beta_k y dy - \int_x^{b+c}\left[(-1)^k S_1(t) - S_0(t) + \frac{1}{\beta_k}\int_0^d Q(t, y + \right.$$

$$\left.\left. + d_0)\sin\beta_k y dy\right]\operatorname{sh}\beta_k(b + c - t)dt\right\},$$

$$\psi_k(x) = \frac{2\operatorname{sh}\gamma_k(b_1 + c - c_1 - x)}{d_1\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\left\{\int_0^{d_1} T_3(y + d_0 + d)\sin\gamma_k y dy - \right.$$

$$- \int_{c-c_1}^{x}\left[(-1)^k S_2(t) - S_1(t) + \frac{1}{\gamma_k}\int_0^{d_1} Q(t, y + d_0 + d)\sin\gamma_k y dy\right]\operatorname{sh}\gamma_k(x - \tag{10}$$

$$\left. - t)dt\right\} + \frac{2\operatorname{sh}\gamma_k(x - c + c_1)}{d\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\left\{\int_0^{d_1} T_4(y + d_0 + d)\sin\gamma_k y dy - \right.$$

$$- \int_x^{b_1 + c - c_1}\left[(-1)^k S_2(t) - S_1(t) + \frac{1}{\gamma_k}\int_0^{d_1} Q(t, y + d_0 + \right.$$

$$\left.\left. + d)\sin\gamma_k y dy\right]\operatorname{sh}\gamma_k(b_1 + c - c_1 - t)dt\right\}.$$

Для определения в промежутке $(c, c + b)$ значений функций $S(x)$ и $S_1(x)$, входящих в выражения (7) и (10), следует выполнить вторую группу условий сопряжения (4). Отметим при этом, что вид выражений (7) и (10), очевидно, не зависит от характера второй группы условий (4) и остается неизменным при различных условиях сопряжения.

Заметим далее следующее: вследствие неоднородности граничных условий для $U_1(x, y)$ ряд (5) представляет решение внутри области $y < d_0$, $0 \leqslant x < b_0$ и, как известно ([5]), обладает слабой сходимостью, — члены его убывают со скоростью $\frac{1}{k}$.

Усилим сходимость ряда (5). Для этого выделим из $U_1(x, y)$ выражение

$$V_1(x, y) = \left(1 - \frac{y}{d_0}\right) S_0(x) + \frac{y}{d_0} S(x), \tag{11}$$

принимающее соответственно значения $S_0(x)$ и $S(x)$ на линиях $y = 0$ и $y = d_0$. При этом в точках разрыва функций $S_0(x)$ и $S(x)$ берется среднеарифметическое их значений слева и справа. Разлагая функцию $V_1(x, y)$ в ряд по $\sin\alpha_k y$, прибавим и вычтем ее из (5). Будем иметь:

$$U_1(x, y) = \left(1 - \frac{y}{d_0}\right) S_0(x) + \frac{y}{d_0} S(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^*(x) \sin\alpha_k y. \tag{12}$$

Ряд в правой части выражения (12) обладает усиленной сходимостью: члены его

$$f_k^*(x) = f_k(x) - \frac{2}{\alpha_k d_0}\left[S_0(x) - (-1)^k S(x)\right] \tag{13}$$

убывают в точках разрыва производной со скоростью $\frac{1}{k^2}$, в точках же непрерывности производной — со скоростью $\frac{1}{k^3}$.

Поступая аналогично с $U_2(x, y)$ и $U_3(x, y)$, будем иметь:

$$U_2(x, y) = \left(1 - \frac{y - d_0}{d}\right) S(x) + \frac{y - d_0}{d} S_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^*(x) \sin\beta_k (y - d_0), \tag{14}$$

$$U_3(x, y) = \left(1 - \frac{y - d_0 - d}{d_1}\right) S_1(x) + \frac{y - d_0 - d}{d_1} S_2(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^* \sin\gamma_k (y - d_0 - d).$$

Здесь

$$\varphi_k^*(x) = \varphi_k(x) - \frac{2}{\beta_k d}\left[S(x) - (-1)^k S_1(x)\right],$$

$$\psi_k^*(x) = \psi_k(x) - \frac{2}{\gamma_k d_1}\left[S_1(x) - (-1)^k S_2(x)\right]. \tag{15}$$

Удовлетворим теперь второй группе условий сопряжения. Согласно (4), в промежутке $(c, c + b)$ имеем

$$\frac{S(x) - S_0(x)}{d_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i^{*}(x) = \frac{S_1(x) - S(x)}{d} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i^{*}(x). \tag{16}$$

Обе части уравнения (16) умножим на $\frac{2}{b}\sin\delta_k(x-c)dx$, где $\delta_k = \frac{k\pi}{b}$, и проинтегрируем в пределах от c до $c+b$. При этом, в силу того, что ряды, входящие в (16), абсолютно сходятся внутри $(c, c+b)$, возможна перестановка знаков суммы и интеграла.

Определим значения интегралов, входящих под знак сумм. Принимая во внимание (13) и интегрируя по частям, а также используя дифференциальное уравнение (6), после приведения получим:

$$\int_c^{c+b} f_i(x)\sin\delta_k(x-c)dx = \frac{\delta_k}{\alpha_i^2 + \delta_k^2}\Bigg\{ f_i(c) - (-1)^k f_i(c+b) - \frac{2\delta_k}{\alpha_i d_0}\int_c^{c+b}\Bigg[S(x) -$$

$$- (-1)^i S(x) + \frac{\alpha_i}{\delta_k^2}\int_0^{d_0} Q(x, y)\sin\alpha_i y dy\Bigg]\sin\delta_k(x-c)dx. \tag{17}$$

Подобным образом находим выражение для $\int_c^{c+b} \varphi_i^{*}(x)\sin\delta_k(x-c)dx$.

Подставив полученные выражения в (16), а также принимая во внимание граничные условия для $\varphi_k(x)$ и производя суммирование, после преобразований придем к следующему соотношению

$$a_k = \frac{\operatorname{sh}\delta_k d_0}{\operatorname{sh}\delta_k(d_0 + d)}\Bigg\{ -\frac{2\operatorname{sh}\delta_k d}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i(-1)^{i+1}}{\alpha_i^2 + \delta_k^2}\Bigg[f_i(c) -$$

$$- (-1)^k f_i(c+b)\Bigg] + g_k\Bigg\} + \mu_k. \tag{18}$$

Здесь обозначено

$$a_k = \frac{2}{b}\int_c^{c+b} S(x)\sin\delta_k(x-c)dx; \qquad g_k = \frac{2}{b}\int_c^{c+b} S_i(x)\sin\delta_k(x-c)dx;$$

$$\mu_k = \frac{2}{b\operatorname{sh}\delta_k(d_0 + d)}\Bigg\{\operatorname{sh}\delta_k d\int_c^{c+b}\Bigg[S_0(x) - \frac{1}{\delta_k}\int_0^{d_0} Q(x, y)\operatorname{sh}\delta_k y dy\Bigg]\sin\delta_k(x-c)dx +$$

$$+ \operatorname{sh}\delta_k d_0\int_{d_0}^{d_0+d}\Bigg[T_1(y) - (-1)^k T_2(y) - \frac{1}{\delta_k}\int_c^{c+b} Q(x_1 y)\sin\delta_k(x -$$

$$-c)dx\Bigg]\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0-y)dy\Bigg\}. \tag{19}$$

Аналогичным образом получаем

$$g_k=\frac{\operatorname{sh}\delta_k d_1}{\operatorname{sh}\delta_k(d+d_1)}\Bigg\{\frac{2\operatorname{sh}\delta_k d}{b}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{\gamma_i^2+\delta_k^2}\Big[\psi_i(c)-(-1)^k\psi_i(c+$$

$$+b)\Big]+a_k\Bigg\}+\nu_k. \tag{20}$$

Здесь

$$\nu_k=\frac{2}{b\operatorname{sh}\delta_k(d+d_1)}\Bigg\{\operatorname{sh}\delta_k d_1\int_{d_0}^{d_0+d}\Big[T_1(y)-(-1)^k T_2(y)-$$

$$-\frac{1}{\delta_k}\int_c^{c+b}Q(x,y)\sin\delta_k(x-c)dx\Big]\operatorname{sh}\delta_k(y-d_0)dy+\operatorname{sh}\delta_k d\int_c^{c+b}\Big[S_2(x)-$$

$$-\frac{1}{\delta_k}\int_0^{d_1}Q(x,y+d_0+d)\operatorname{sh}\delta_k(d_1-y)dy\Big]\sin\delta_k(x-c)dx\Bigg\}. \tag{21}$$

В свою очередь значения коэффициентов $f_k(c)$, $f_k(c+b)$, $\psi_k(c)$ и $\psi_k(c+b)$, согласно (7) и (10), определятся из следующих соотношений:

$$f_k(c)=\frac{2(-1)^{k+1}\operatorname{sh}\alpha_k c}{d_0\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i\delta_i}{\delta_i^2+a_k^2}\Big[\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-c)-$$

$$-(-1)^i\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-b-c)\Big]+p_k,$$

$$f_k(c+b)=\frac{2(-1)^{k+1}\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-b-c)}{d\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i\delta_i}{\delta_i^2+a_k^2}\Big[\operatorname{sh}\alpha_k c-$$

$$-(-1)^i\operatorname{sh}\alpha_k(b+c)\Big]+q_k, \tag{22}$$

$$\psi_k(c)=\frac{2\operatorname{sh}\gamma_k c_1}{d_1\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i\delta_i}{\delta_i^2+\gamma_k^2}\Big[\operatorname{sh}\gamma_k(b_1-c_1)-(-1)^i\operatorname{sh}\gamma_k(b_1-b-c_1)\Big]+r_k,$$

$$\psi_k(c+b)=\frac{2\operatorname{sh}\gamma_k(b_1-b-c_1)}{d_1\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{g_i\delta_i}{\delta_i^2+\gamma_k^2}\Big[\operatorname{sh}\gamma_k c_1-$$

$$-(-1)^i\operatorname{sh}\gamma_k(b+c_1)\Big]+s_k.$$

Здесь через p_k, q_k, r_k, s_k обозначены те части выражений (7) и (10), которые содержат заданные функции $S_i(x)$, $T_i(y)$ и $Q(x, y)$ и, как легко видеть, ограничены в своей совокупности, согласно предположениям относительно функций $S_i(x)$, $T_i(y)$ и $Q(x, y)$.

Займемся регуляризацией полученных бесконечных систем (18), (20) и (22). С этой целью предварительно преобразуем их. Введя обозначения:

$$a_k + g_k = \frac{4\eta_k}{\sqrt{3}\,\delta_k b}, \qquad a_k - g_k = \frac{2\theta_k}{\sqrt{3}\,\delta_k b},$$

$$f_k(c) - f_k(c+b) = (-1)^{k+1}\frac{m_k}{\alpha_k d_0},$$

$$f_k(c) + f_k(c+b) = (-1)^{k+1}\frac{n_k}{\alpha_k d_0}, \qquad \psi_k(c) - \psi_k(c+b) = \frac{l_k}{\gamma_k d_1},$$

$$\psi_k(c) + \psi_k(c+b) = \frac{h_k}{\gamma_k d_1}, \tag{23}$$

после простых преобразований окончательно получим для η_k и θ_k следующие выражения:

$$\eta_0 = \sqrt{3}\,\delta_k \operatorname{sh}\delta_k d_0 \frac{\operatorname{sh}\delta_k(d+d_1) + \operatorname{sh}\delta_k d_1}{4d_0 \operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]m_i + [1-(-1)^k]n_i}{\alpha_i^2 + \delta_k^2} +$$

$$+ \sqrt{3}\,\delta_k \operatorname{sh}\delta_k d_1 \frac{\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0) + \operatorname{sh}\delta_k d_0}{4d_1 \operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]l_i + [1-(-1)^k]h_i}{\gamma_i^2 + \delta_k^2} + \mu_k^*, \tag{24}$$

$$\theta_k = \sqrt{3}\,\delta_k \operatorname{sh}\delta_k d_0 \frac{\operatorname{sh}\delta_k(d+d_1) - \operatorname{sh}\delta_k d_1}{2d_0 \operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]m_i + [1-(-1)^k]n_i}{\alpha_i^2 + \delta_k^2} -$$

$$- \sqrt{3}\,\delta_k \operatorname{sh}\delta_k d_1 \frac{\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0) - \operatorname{sh}\delta_k d_0}{2d_1 \operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]l_i + [1-(-1)^k]h_i}{\gamma_i^2 + \delta_i^2} + \nu_k^*.$$

Здесь

$$\mu_k^* = \frac{\sqrt{3}\,\delta_k b}{4\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)\operatorname{sh}\frac{\delta_k d}{2}} \Big\{ \mu_k \operatorname{sh}\delta_k(d+d_0)\operatorname{sh}\delta_k\left(d_1 + \frac{d}{2}\right) +$$

$$+ \nu_k \operatorname{sh}\delta_k(d+d_1)\operatorname{sh}\delta_k\left(d_0 + \frac{d}{2}\right)\Big\}, \tag{25}$$

$$\nu_k^* = \frac{\sqrt{3}\,\delta_k b}{2\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0+d_1)\operatorname{ch}\dfrac{\delta_k d}{2}}\left\{\mu_k\operatorname{sh}\delta_k(d+d_0)\operatorname{ch}\delta_k\left(d_1+\frac{d}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\nu_k\operatorname{sh}\delta_k(d+d_1)\operatorname{ch}\delta_k\left(d_0+\frac{d}{2}\right)\right\}.$$

При этом функции $S(x)$ и $S_1(x)$ в промежутке $(c,\ c+b)$, согласно (19) и (23), будут иметь вид:

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\eta_k+\theta_k}{\delta_k}\sin\delta_k(x-c),$$

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}\,b}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\eta_k-\theta_k}{\delta_k}\sin\delta_k(x-c). \tag{26}$$

В свою очередь величины m_k, n_k, l_k и h_k, входящие в (24), определятся, согласно (22) и (23), из следующих соотношений:

$$m_k = \frac{4\alpha_k}{\sqrt{3}\,b\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\operatorname{sh}\frac{\alpha_k b}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta_i+\theta_i}{\delta_i^2+\alpha_k^2}\left[\operatorname{ch}\alpha_k\left(b_0-c-\frac{b}{2}\right)\operatorname{sh}\alpha_k c+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-c-b)\operatorname{ch}\alpha_k\left(c+\frac{b}{2}\right)\right]+(-1)^{k+1}\alpha_k d_0(p_k-q_k),$$

$$n_k = \frac{4\alpha_k}{\sqrt{3}\,b\operatorname{sh}\alpha_k b_0}\operatorname{ch}\frac{\alpha_k b}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta_i+\theta_i}{\delta_i^2+\alpha_k^2}\left[\operatorname{sh}\alpha_k\left(b_0-c-\frac{b}{2}\right)\operatorname{sh}\alpha_k c-\right.$$

$$\left.-(-1)^i\operatorname{sh}\alpha_k(b_0-c-b)\operatorname{sh}\alpha_k\left(c+\frac{b}{2}\right)\right]+(-1)^{k+1}\alpha_k d_0(p_k+q_p), \tag{27}$$

$$l_k = \frac{4\gamma_k}{\sqrt{3}\,b\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\operatorname{sh}\frac{\gamma_k b}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta_i+\theta_i}{\delta_i^2+\alpha_k^2}\left[\operatorname{ch}\gamma_k\left(b_1-c_1-\frac{b}{2}\right)\operatorname{sh}\gamma_k c_1+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\operatorname{sh}\gamma_k(b_1-c_1-b)\operatorname{ch}\gamma_k\left(c_1+\frac{b}{2}\right)\right]+\gamma_k d_1(r_k-s_k),$$

$$n_k = \frac{4\gamma_k}{\sqrt{3}\,b\operatorname{sh}\gamma_k b_1}\operatorname{ch}\frac{\gamma_k b}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta_i-\theta_i}{\delta_i^2+\gamma_i^2}\left[\operatorname{sh}\gamma_k\left(b_1-c_1-\frac{b}{2}\right)\operatorname{sh}\gamma_k c_1-\right.$$

$$\left.-(-1)^i\operatorname{sh}\gamma_k(b_1-c_1-b)\operatorname{sh}\gamma_k\left(c_1+\frac{b}{2}\right)\right]+\gamma_k d_1(r_k+s_k).$$

Произведенные оценки показывают, что сумма модулей коэффициентов любого уравнения из систем (24) и (27) меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$, всегда, независимо от геометрических характеристик области, т. е. совокупность систем (24) и (27) вполне регулярна. Из ограниченности свободных членов, согласно теории регулярных систем[6], следует единственность ограниченного решения и сходимость метода последовательных приближений.

Заметим, что, как показано в работе [7], системы (24) и (27) можно преобразовать так, чтобы свободные члены вновь полученных систем стремились к нулю со скоростью не ниже, чем $\frac{1}{k}$. При этом, как нетрудно показать, решения этих систем будут убывать со скоростью $k^{-0,35}$.

Из предельных случаев, получаемых из рассматриваемой области, отметим: швеллер, тавр, уголок, область с трещинами, зетобразную область и область в виде четверки. В заключение отметим, что использованием указанного выше способа получено решение смешанных краевых задач бигармонического уравнения для аналогичных областей.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Որոշ պոլիգոնալ տիրույթների համար Դիրիխլեի խնդրի մի լուծման մասին

Հոդվածում տրվում է ուղիղ անկյուններով պոլիգոնալ տիրույթների համար Դիրիխլեի խնդրի էֆեկտիվ լուծման մի պարզեցված եղանակ՝ այդ տիրույթը փոքրագույն թվով ուղղանկյունների հատման միջոցով։ Յուրաքանչյուր ուղղանկյան ներսում խնդրի լուծումը որոնվում է Ֆուրյեի շարքի տեսքով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. С. Боженко*, Инженерный сб., V, в. I, 1948. [2] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, XIII, 1 (1950). [3] *Р. С. Минасян*, ДАН АрмССР, XII, 3 (1950). [4] *Р. С. Минасян*, ПММ, т. XVI, в. 3 (1952). [5] *Г. А. Гринберг*, Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948. [6] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа. Гостехиздат, 1950. [7] *Р. С. Минасян*, ИАН АрмССР, ФМЕТН, V, 5 (1952).