ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXII 1955 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Г. Саноян

Представление некоторых плоских и осесимметричных течений через интегралы Фурье и Фурье-Бесселя

(Представлено Н. Х. Арутюняном 10.XI.1955)

Во входных сечениях таких важных элементов промышленных установок или гидротехнических сооружений, какими являются конфузорные или диффузорные каналы, обычно устанавливается та или иная эпюра скоростей. Между тем в литературе нет способа, позволяющего рассчитать скорости и давления и построить очертания таких каналов, когда задано распределение скорости на входе. Такого рода задачи для плоского и осесимметричного потоков решаются в настоящей статье.

I. *Плоские течения.* 1) Потенциал скоростей безвихревого потока идеальной несжимаемой жидкости можно выразить через интеграл Фурье ([1]).

$$\varphi = -\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}(A_\lambda \cos\lambda y + B_\lambda \sin\lambda y)d\lambda. \tag{1}$$

Коэффициенты A_λ и B_λ определим таким образом, чтобы продольные скорости на входе в канал ($x=0$) имели заданное распределение, т. е.

$$u\Big|_{x=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0} = f(y). \tag{2}$$

Согласно (1) и (2) имеем:

$$f(y) = \int_0^\infty (A_\lambda \cos\lambda y + B_\lambda \sin\lambda y)d\lambda, \tag{3}$$

а это представляет собой обычное разложение функции $f(y)$ по интегралам Фурье, при условии, что $f(y)$ удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, \infty)$ ([3]). Принимая во внимание еще четность $f(y)$ для коэффициентов A_λ и B_λ получим выражения

$$A_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi, \qquad B_\lambda = 0. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) преобразуем последнее к виду

$$\varphi = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)d\xi\int_0^\infty e^{-\lambda x}\cos\lambda\xi\cos\lambda y d\lambda, \tag{5}$$

или, после некоторых преобразований,

$$\varphi = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)d\xi\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\cos\lambda(\xi - y)d\lambda. \tag{5'}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^\infty e^{-pz}\cos qz dz = \frac{p}{p^2+q^2}; \quad \int_0^\infty e^{-pz}\sin qz dz = \frac{q}{p^2+q^2},$$

для продольной и поперечной составляющих скоростей будем иметь соответственно формулы:

$$u = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cdot\frac{d\xi}{x^2+(\xi-y)^2}, \tag{6}$$

$$v = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\frac{\xi-y}{x^2+(\xi-y)^2}. \tag{7}$$

Учитывая условие $\Psi = 0$ при $y = 0$, легко получим выражение для функции тока:

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2+\xi^2}\right)d\xi. \tag{8}$$

Очертание образующей канала определится уравнением $\Psi = \text{const}$.

Недостаток решений (6) и (7) состоит в том, что они не допускают проверки граничных условий.

Используя обозначение $\xi - y = x\operatorname{tg}\theta$, приведем выражения (6) и (7) к видам:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x\operatorname{tg}\theta + y)d\theta, \tag{6'}$$

$$v = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x\,\mathrm{tg}\theta + y)\,\mathrm{tg}\theta\, d\theta. \qquad (7')$$

Из этих решений видно, что удовлетворяется граничное условие (2).

2) Для проверки вышеприведенных формул решим теперь обратную задачу: определим распределение скоростей в поперечном сечении ($x = 0$) канала, очертание которого имеет форму гиперболы.

Для решения задачи перейдем к эллиптическим координатам. Как известно, уравнение [3]

$$z = c\,\mathrm{sh}\zeta, \qquad (9)$$

где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$ дает переход от декартовых координат к эллиптическим координатам.

Из (9) имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= c\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \infty, \\ y &= c\,\mathrm{ch}\xi\sin\eta, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi. \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

Полагая

$$\mathrm{sh}\xi = \lambda,\ \cos\eta = \mu,\ (0 \leqslant \lambda \leqslant \infty; -1 \leqslant \mu \leqslant +1),$$

будем иметь

$$x = c\mu\lambda;\ y = c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}. \qquad (11)$$

Напишем уравнение Лапласа в эллиптических координатах

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{1-\mu^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\lambda^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = 0; \qquad (12)$$

частным решением этого уравнения является решение

$$\varphi = A\,\mathrm{arsh}\lambda + B. \qquad (13)$$

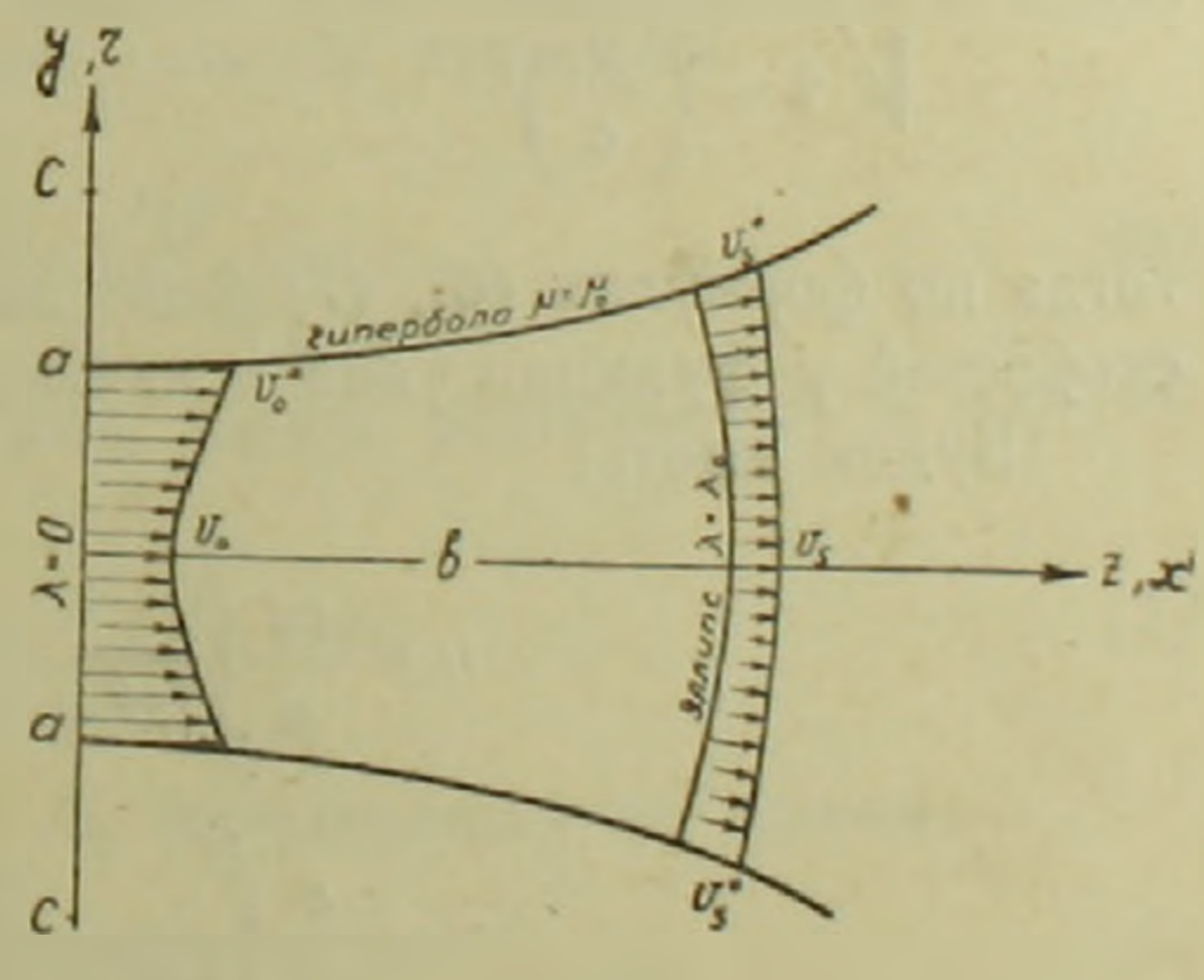
Используя соотношения

$$V_\lambda = \frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} = \frac{A}{c\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},$$

$$V_\mu = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = -\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} = 0, \qquad (14)$$

где H_λ и H_μ коэффициенты Ляме, легко определить функцию тока Ψ.

$$\Psi = A\arcsin\mu. \qquad (15)$$



Фиг. 1.

Из (13) и (15) очевидно, что эквипотенциальными линиями и линиями токов данного течения служат соответственно эллипсы $\lambda = \lambda_0$ и гиперболы $\mu = \mu_0$.

Если обозначить полуоси эллипса и гиперболы соответственно через b и a, то получается.

$$\lambda_0 = \frac{b}{c}, \qquad \mu_0 = \frac{a}{c}.$$

Обозначая осевую скорость во входном сечении ($\lambda = 0$, $\mu = 1$, или $x = 0$, $y = 0$) через v_0, из (14) получим:

$$\frac{V_\lambda}{v_0} = \frac{1}{c\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}. \tag{16}$$

Значение c можно определить из условия, чтобы во входном сечении отношение скоростей на стенках ($y = \pm a$) к осевой ($y = 0$) было заданным. Обозначая это отношение через α, получим:

$$c = \sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1}}\, a, \qquad (\alpha > 1). \tag{17}$$

Распределение скорости во входном сечении будет выражаться формулой

$$\frac{V_{0\lambda}}{v_0} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2}}. \tag{18}$$

Определив, наконец, скорости на плоскости симметрии течения ($y = 0$), будем иметь, согласно (16) и (11),

$$\frac{u}{v_0} = \frac{c}{\sqrt{x^2 + c^2}}, \tag{19}$$

т. е. скорости монотонно уменьшаются по длине канала.

3) Предположим теперь, что распределение скорости во входном сечении меняется по закону

$$(u)_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2}}, \text{ если } -c < y < c, \quad (u)_{x=0} = 0, \text{ если } |y| > c, \tag{20}$$

тогда по формулам (6), (7) и (8) легко найти значения составляющих скоростей у функции тока в любой точке течения.

Будем иметь:

$$u = \frac{cx}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{d\xi}{[x^2 + (\xi - y)^2]\sqrt{c^2 - \xi^2}}, \tag{21}$$

$$v = \frac{c}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{(\xi - y)dy}{[x^2 + (\xi - y)^2]\sqrt{c^2 - \xi^2}}, \tag{22}$$

$$\Psi = \frac{c}{\pi}\int_{0}^{c}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2 + \xi^2}\right)}{\sqrt{c^2 - \xi^2}}\,d\xi. \tag{23}$$

Определим, например, распределение продольной составляющей скорости на плоскости симметрии потока.

Из (21) получим:

$$u\Big|_{y=0} = \frac{c}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x^2+c^2}{x^2}}\frac{\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}\right)\Bigg|_{-c}^{c} = \frac{c}{\sqrt{x^2+c^2}}, \tag{24}$$

т. е. результат, совпадающий с (19).

Для второго примера, допустим, что скорости равномерно распределены внутри интервала $(-c, +c)$. Тогда из формул (6), (7) и (8) получим:

$$\left.\begin{aligned}
u &= \frac{xv_0}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{d\xi}{x^2+(\xi-y)^2} = \frac{v_0}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{c-y}{x} + \operatorname{arctg}\frac{c+y}{x}\right),\\
v &= \frac{v_0}{\pi}\int_{-c}^{c}\frac{\xi-y}{x^2-(\xi-y)^2}d\xi = \frac{v_0}{\pi}\ln\sqrt{\frac{x^2+(c-y)^2}{x^2+(c+y)^2}},\\
\Psi &= \frac{v_0}{\pi}\int_{0}^{c}\operatorname{arctg}\left(\frac{2xy}{x^2-y^2+\xi^2}\right)d\xi = \frac{v_0}{\pi}\left[c\operatorname{arctg}\frac{2xy}{1+(c^2-y^2)} + \right.\\
&\left. + y\operatorname{arctg}\frac{2cx}{1-(c^2-y^2)} + x\ln\sqrt{\frac{x^2+(c-y)^2}{x^2+(c+y)^2}}\right].
\end{aligned}\right| \tag{25}$$

По вышеприведенным формулам легко рассчитать значения скоростей и функции тока и построить очертания плоских каналов.

II. *Осесимметричные течения.* 1) Уравнение Лапласа для определения потенциала скоростей в безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости в случае осесимметричного движения

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \tag{1}$$

где r и z цилиндрические координаты, имеет решение для $z > 0$ ([4]):

$$\varphi = -\int_0^\infty A_\lambda e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\lambda d\lambda. \tag{2}$$

Аналогично плоскому случаю A_λ определяется из условия

$$V_z/_{z=0} = f(r), \tag{3}$$

согласно которому из (2) получим:

$$f(r) = \int_0^\infty A_\lambda J_0(\lambda r)\lambda^2 d\lambda.$$

Если функция $f(r)$ удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема в промежутке $(-\infty, +\infty)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)|\, d\xi$$

существует, то (4) представляет обычное разложение функции $f(r)$ по интегралам Фурье-Бесселя, при этом A_λ определяется следующим образом:

$$\lambda A_\lambda = \int_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\xi d\xi. \tag{5}$$

Тогда выражение для потенциала скоростей примет вид

$$\varphi = -\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\xi d\xi. \tag{6}$$

Составляющие скорости и функция тока выразятся соответственно следующими формулами:

$$V_z = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\lambda d\lambda \int_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\xi d\xi, \tag{7}$$

$$V_z = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r)\lambda^2 d\lambda \int_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\xi d\xi, \tag{8}$$

$$\Psi = r\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r) d\lambda \int_0^\infty f(\xi) J_0(\lambda\xi)\xi d\xi. \tag{9}$$

В вышеприведенных формулах J_0 и J_1 бесселевые функции соответственно нулевого и первого порядка, первого рода.

2) Решим теперь обратную задачу: определим эпюру скоростей в поперечном сечении канала, когда его поверхность является гиперболоидом вращения. Для этого, аналогично плоскому случаю, перейдем к эллиптическим координатам.

Если декартовые координаты x, y, z объединить в комплексы

$$z + ir = c\,\mathrm{sh}(\xi + i\eta),\quad x + iy = re^{i\theta},$$

то ξ и η будут служить параметрами ортогональных семейств эллипсов и гипербол в меридиональных сечениях.

Вводя обозначения (11) предыдущего параграфа, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= c\lambda\mu, \\ r &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Частным решением уравнения Лапласа для определения потенциала скоростей в случае осесимметричного движения

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(1+\lambda^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right]+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right]=0 \qquad (11)$$

является решение

$$\varphi = A\operatorname{arcctg}\lambda + \text{const}. \qquad (12)$$

Для функции тока получим формулу

$$\Psi = Ac\mu. \qquad (12')$$

Если обозначить осевую скорость во входном сечении (при $\lambda=0$, $\mu=1$) через v_0, то распределение скорости в сечении $\lambda=\text{const}$ выразится формулой

$$V_\lambda=\frac{1}{H_\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}=\frac{v_0}{\sqrt{(\lambda^2+\mu^2)(1+\lambda^2)}}, \qquad (13)$$

где

$$H_\lambda=\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2}=c\sqrt{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}}$$

коэффициент Ляме.

Определив распределения скоростей по входному сечению ($\lambda=0$) и на оси ($\mu=1$); будем иметь:

$$(V_\lambda)_{\lambda=0}=V_z/_{z=0}=\frac{1}{\mu}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2}}, \qquad (14)$$

$$(V_\lambda)_{\mu=1}=V_z/_{r=0}=\frac{1}{1+\lambda^2}=\frac{v_0}{1+\left(\frac{z}{c}\right)^2}. \qquad (15)$$

3) Теперь решим эту же самую задачу при помощи формул, приведенных в первом пункте.

Допустим, что распределение скорости во входном сечении определяется формулой

$$(V_z)_{z=0}=\frac{v_0}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{c}\right)^2}},\quad \text{если}\quad 0\leqslant r\leqslant c,$$

$$(V_z)_{z=0}=0,\quad \text{если}\quad r>c,$$

тогда по формуле (7) найдем

$$V_z=cv_0\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\lambda d\lambda\int\limits_0^c\frac{J_0(\lambda\xi)\xi d\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}. \qquad (16)$$

Принимая во внимание, что [5]

$$\int\limits_0^c\frac{J_0(\lambda\xi)\xi d\xi}{\sqrt{c^2-\xi^2}}=c\int\limits_0^{\pi/2}J_0(\lambda c\sin t)\sin t dt=c\,\frac{\Gamma(^1/_2)}{2(\lambda c)^{1/2}}\,J_{^1/_2}(\lambda c)$$

и замечая, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \qquad J_{1/2}(\lambda c)=\sqrt{\frac{2}{\pi\lambda c}}\sin\lambda c,$$

приводим выражение для V_z к виду

$$V_z = cv_0\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\sin(\lambda c)d\lambda \tag{17}$$

Определяя распределение скорости на оси потока ($r=0$)

$$V_{0z} = cv_0\int_0^\infty e^{-\lambda z}\sin(\lambda c)\,d\lambda = \frac{v_0c^2}{c^2+z^2}, \tag{18}$$

видим, что оно в точности совпадает с (14).

Наконец, для поперечной составляющей скорости и функции тока получим формулы

$$V_r = cv_0\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\sin(\lambda c)\lambda d\lambda, \qquad \Psi = cv_0\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\sin(\lambda c)\frac{d\lambda}{\lambda}. \tag{19}$$

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Վ. Գ. ՍԱՆՈՅԱՆ

Մի քանի հարթ և առանցքային սիմետրիա ունեցող հոսանքների արտահայտումը Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Բեսսելի ինտեգրալների միջոցով

Հոդվածում, ըստ մուտքում տրված արագությունների բաշխման, որոշվում է արագությունները (հետևաբար՝ ճնշումները) հոսանքի ցանկացած կետերում և կառուցվում է հարթ և առանցքային սիմետրիա ունեցող ջրանցքների եզրագծերը։

Հարթ ջրանցքների դեպքում արագությունների պոտենցիալը արտահայտվում է Ֆուրյեի ինտեգրալով (5), իսկ առանցքային սիմետրիա ունեցող ջրանցքների դեպքում՝ Ֆուրյե-Բեսսելի ինտեգրալով (6) (պարագրաֆ 2)։

Որպես օրինակներ բերված են հետևյալ դեպքերը. 1) երբ հարթ ջրանցքի մուտքում արագությունների բաշխումը արտահայտվում է (20) բանաձևով. այդ դեպքում ցանկացած կետում արագությունների բաղադրիչները և հոսքի ֆունկցիան արտահայտվում են (21), (22) և (23) բանաձևերով, ջրանցքի եզրագիծն ունի հիպերբոլի ձև, 2) երբ ջրանցքի մուտքում տեղի ունի արագությունների համասեռ բաշխում. այդ դեպքում արագության բաղադրիչների և հոսքի ֆունկցիայի համար ստացվում են (25) բանաձևերը։

Առանցքային սիմետրիա ունեցող ջրանցքների համար որպես օրինակներ լուծված է 1) այն դեպքը, երբ նրանց մուտքում արագությունների բաշխումը համապատասխանում է (14) արտահայտությանը. այդ ժամանակ արագության բաղադրիչները և հոսքի ֆունկցիան արտահայտվում են (17), (19) և (20) բանաձևերով։

Հոդվածում տրված եղանակի օգնությամբ կարելի է կառուցել ջրանցքների եզրագծերը, երբ նրանց մուտքում արագությունների բաշխումը արտահայտվում է ցանկացած օրենքով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Е. Кочин, И. А. Кибель* и *Н. В. Розе*, Теоретическая гидромеханика, ч. I, ГИТТЛ, 1948. [2] *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. II, ГТТИ, 1934. [3] *Е. В. Гобсон*, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952. [4] *Г. Н. Ватсон*, Теория бесселевых функций, ч. I, ИЛ, 1949. [6] *И. М. Рыжик* и *И. С. Градштейн*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, 1951.