

Р. С. Минасян

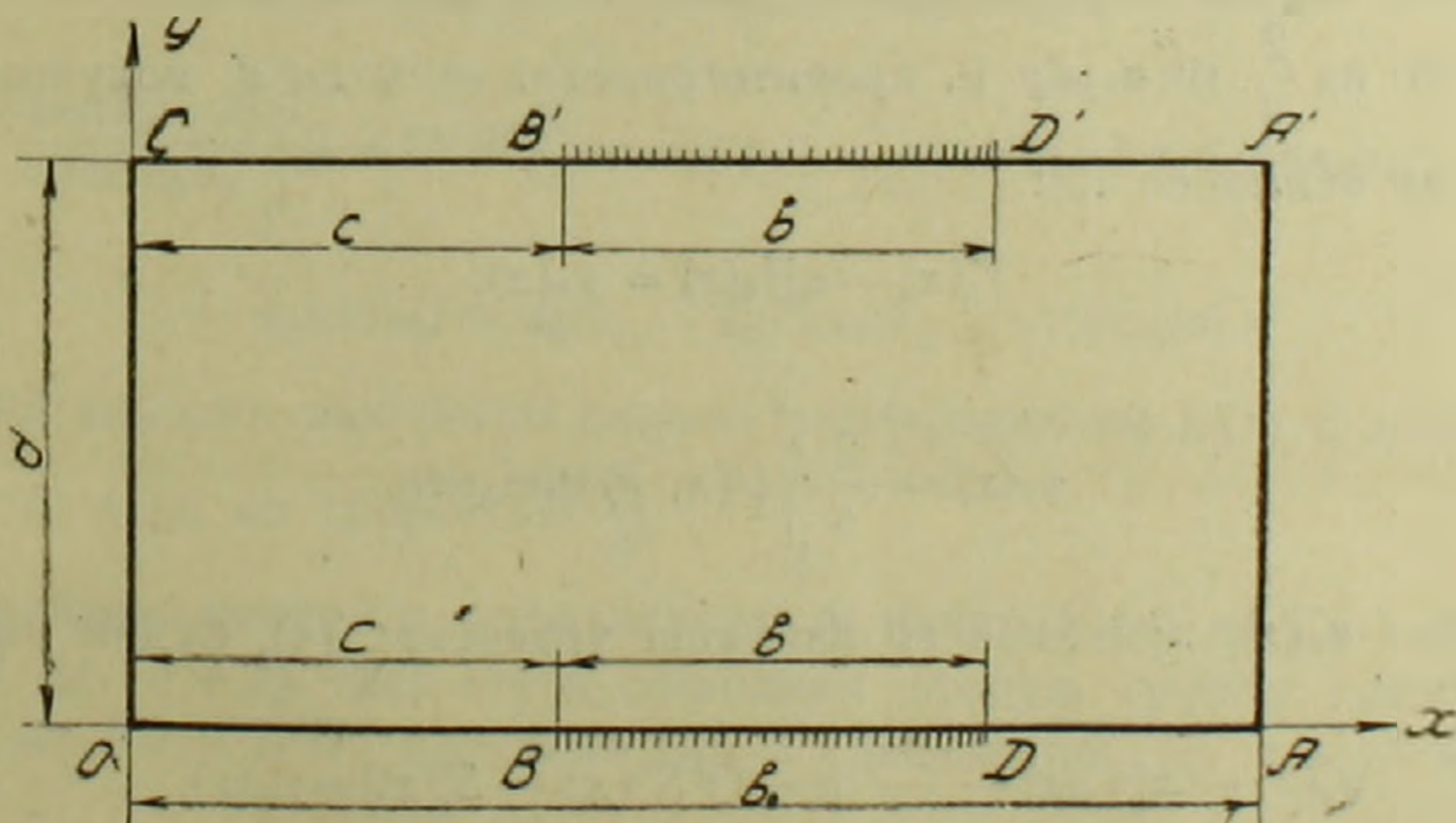
Об одной смешанной задаче изгиба прямоугольной пластинки

(Представлено А. Л. Шагиняном 12.XII.1955)

Задача изгиба пластинки, когда часть края ее свободно оперта, а остальная часть защемлена, в случае гладкого контура была исследована А. И. Каландия (¹), приведшим ее с помощью интегрального представления (²) к интегральным уравнениям Фредгольма. Для круга эффективное решение этой задачи было дано Д. И. Шерманом (³), который свел ее к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений. В случае прямоугольника такая задача была исследована В. Новацким (⁴), сведшим ее к системе уравнений Фредгольма.

В настоящей заметке дается решение задачи изгиба прямоугольной пластинки, когда часть ее края $DAA'D'$ и $B'COB$ свободно оперта, остальная же часть защемлена. Решение ищется в виде ряда Фурье, обладающего довольно быстрой сходимостью. Выполнение граничных условий приводит к совокупности вполне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Пусть прямоугольная пластинка $OAA'C$ (фиг. 1), свободно опертая по краям $B'COB$ и $DAA'D'$ и защемленная на отрезках BD и $B'D'$, изгибается под действием произвольной нормальной нагрузки $P(x, y)$.



Фиг. 1.

Прогиб $W(x, y)$, как известно ⁽⁶⁾, будет удовлетворять уравнению

$$\Delta^2 W(x, y) = \frac{P(x, y)}{D} \quad (1)$$

и граничным условиям

$$W|_S = 0 \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=b_0} = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=d} = 0, \quad (x < c) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=d} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_{y=d} = 0, \quad (c < x < c + b)$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, D — цилиндрическая жесткость пластинки, S — ее контур.

Относительно нагрузки $P(x, y)$ предполагаем, что она ограниченной вариации.

Прежде чем переходить к построению решения задачи, обозначим

$$\Delta W(x, y) = U(x, y). \quad (3)$$

Тогда, очевидно, из (1) и (3) имеем

$$\Delta U(x, y) = -\frac{P(x, y)}{D}. \quad (4)$$

Будем искать функцию $W(x, y)$ в виде ряда Фурье

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \alpha_k y, \quad (5)$$

где

$$f_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d W(x, y) \sin \alpha_k y dy; \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{d}.$$

Для определения коэффициентов $f_k(x)$ умножим обе части уравнения (3) на $\frac{2}{d} \sin \alpha_k y dy$ и, проинтегрировав от 0 до d , получим, принимая во внимание (2):

$$f_k''(x) - \alpha_k^2 f_k(x) = \varphi_k(x), \quad (6)$$

где

$$\varphi_k(x) = \frac{2}{d} \int_0^d U(x, y) \sin \alpha_k y dy.$$

Для $\varphi_k(x)$, принимая во внимание уравнение (4), будем иметь

$$\varphi_k''(x) - \alpha_k^2 \varphi_k(x) - \frac{2\alpha_k}{d} [(-1)^k S^*(x) - S_0^*(x)] = p_k(x). \quad (7)$$

Здесь через $S_0^*(x)$ и $S^*(x)$ обозначены граничные значения функции $U(x, y)$ соответственно при $y = 0$ и $y = d$, очевидно равные нулю на отрезках $[0, c]$ и $[c + b, b_0]$ и неизвестные на $(c, c + b)$;

$$p_k(x) = \frac{2}{dD} \int_0^d P(x, y) \sin \alpha_k y dy. \quad (8)$$

Граничные условия для $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$, согласно (2), будут

$$f_k(0) = f_k(b) = 0; \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(b) = 0. \quad (9)$$

Решая уравнения (6) и (7) и удовлетворяя условиям (9), для $f_k(x)$ и $\varphi_k(x)$ получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -\frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_x^{b_0} \varphi_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) dt - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - x)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^x \varphi_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k t dt, \\ \varphi_k(x) &= \frac{2 \operatorname{sh} \alpha_k x}{d \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_x^{b_0} [S_0^*(t) - (-1)^k S^*(t) - \frac{d}{2\alpha_k} p_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) dt + \\ &+ \frac{2 \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - x)}{d \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^x [S_0^*(t) - (-1)^k S^*(t) - \frac{d}{2\alpha_k} p_k(t)] \operatorname{sh} \alpha_k t dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя в выражение для $f_k(x)$ значение $\varphi_k(t)$, после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\alpha_k^2 d \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_x^{b_0} [(-1)^k S^*(t) - S_0^*(t) + \frac{d}{2\alpha_k} p_k(t)] [1 + \alpha_k b_0 \operatorname{cth} \alpha_k b_0 - \\ &- \alpha_k x \operatorname{cth} \alpha_k x - \alpha_k (b_0 - t) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - t)] \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) dt + \\ &+ \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - x)}{\alpha_k^2 d \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^x [(-1)^k S^*(t) - S_0^*(t) + \frac{d}{2\alpha_k} p_k(t)] [1 + \alpha_k b_0 \operatorname{cth} \alpha_k b_0 - \\ &- \alpha_k t \operatorname{cth} \alpha_k t - \alpha_k (b_0 - x) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - x)] \operatorname{sh} \alpha_k t dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Заметим, что, как легко видеть, коэффициенты $f_k(x)$ с возрастанием k убывают со скоростью $\frac{1}{k^3}$.

Перейдем теперь к определению функций $S_0^*(x)$ и $S^*(x)$ в промежутке $(c, c + b)$. Для этого выполним вторую группу граничных условий на BD и $B'D'$. Согласно (2), в промежутке $(c, c + b)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i f_i(x) = 0. \quad (12)$$

Умножим уравнение (12) на $\frac{2}{b} \sin \beta_k(x-c)dx$, где $\beta_k = \frac{k\pi}{b}$, и проинтегрируем от c до $c+b$. При этом, в силу того, что ряд, входящий в (12), абсолютно сходится, возможна перестановка знаков суммы и интеграла. Поэтому, будем иметь

$$\frac{2}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \int_c^{c+b} f_i(x) \sin \beta_k(x-c) dx = 0. \quad (13)$$

Определим значение интеграла, входящего под знак суммы. Интегрируя по частям и используя уравнения (6) и (7), получим

$$\begin{aligned} \int_c^{c+b} f_i(x) \sin \beta_k(x-c) dx &= \frac{\beta_k}{(\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} \left\{ (\alpha_i^2 + \beta_k^2) [f_i(c) - (-1)^k f_i(c+b)] - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_i(c) + (-1)^k \varphi_i(c+b) - \frac{2\alpha_i}{\beta_k d} \int_c^{c+b} [(-1)^{i+1} S^*(x) + S_0^*(x) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{2\alpha_i} p_i(x)] \sin \beta_k(x-c) dx \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где через $f_i(c), \dots, \varphi_i(c+b)$ обозначены соответственно значения функций $f_i(x)$ и $\varphi_i(x)$ в точках c и $c+b$.

Подставив полученное выражение в (13) и производя суммирование, получим

$$\begin{aligned} C_k \cdot \text{cth} \beta_k d \left(1 - \frac{2\beta_k d}{\text{sh} 2\beta_k d} \right) &= \frac{4\beta_k^2}{b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{(\alpha_i^2 + \beta_k^2)^2} \left\{ (\alpha_i^2 + \beta_k^2) [f_i(c) - (-1)^k f_i(c+b)] - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_i(c) + (-1)^k \varphi_i(c+b) \right\} - \frac{B_k \beta_k d}{\text{sh} \beta_k d} \left(\text{cth} \beta_k d - \frac{1}{\beta_k d} \right) + q_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь обозначено

$$C_k = \frac{2}{b} \int_c^{c+b} S_0^*(x) \sin \beta_k(x-c) dx; \quad B_k = \frac{2}{b} \int_c^{c+b} S^*(x) \sin \beta_k(x-c) dx;$$

$$\begin{aligned} q_k &= \frac{2}{\beta_k \text{sh} \beta_k d} \int_c^{c+b} \int_0^d P(x, y) \text{sh} \beta_k(d-y) [d \text{cth} \beta_k d - \\ &\quad - (d-y) \text{cth} \beta_k(d-y)] \sin \beta_k(x-c) dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, для отрезка $B'D'$ имеем $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (-1)^i f_i(x) = 0$, откуда со-

вершенно аналогично получаем

$$B_{\kappa} \operatorname{cth} \beta_{\kappa} d \left(1 - \frac{2\beta_{\kappa} d}{\operatorname{sh} 2\beta_{\kappa} d} \right) = \frac{4\beta_{\kappa}^2}{d} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i (-1)^{i+1}}{(\alpha_i^2 + \beta_{\kappa}^2)^2} \{ (\alpha_i^2 + \beta_{\kappa}^2) [f_i(c) - (-1)^{\kappa} f_i(c+b)] - \\ - \varphi_i(c) + (-1)^{\kappa} \varphi_i(c+b) \} - \frac{C_{\kappa} \beta_{\kappa} d}{\operatorname{sh} \beta_{\kappa} d} \left(\operatorname{cth} \beta_{\kappa} d - \frac{1}{\beta_{\kappa} d} \right) + r_{\kappa}. \quad (17)$$

Здесь

$$r_{\kappa} = \frac{2}{b \operatorname{sh} \beta_{\kappa} d} \int_c^{c+b} \int_0^d P(x, y) \operatorname{sh} \beta_{\kappa} y (d \operatorname{cth} \beta_{\kappa} d - y \operatorname{cth} \beta_{\kappa} y) \sin \beta_{\kappa} (x - c) dy dx. \quad (18)$$

В свою очередь значения коэффициентов $f_{\kappa}(c)$, $f_{\kappa}(c+b)$, $\varphi_{\kappa}(c)$ и $\varphi_{\kappa}(c+b)$, входящих в выражения (15) и (17), согласно (10), (11) и (16), определяются из следующих соотношений:

$$f_{\kappa}(c) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c}{\alpha_{\kappa}^2 d \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{(-1)^{\kappa} B_i - C_i}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} \left\{ \frac{\beta_i^2 + 3\alpha_{\kappa}^2}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} [\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c) - \right. \\ \left. - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - b - c)] - \alpha_{\kappa} c \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - 2c) - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - b - 2c)}{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c} \right. \\ \left. - (-1)^i \alpha_{\kappa} b \operatorname{ch} \alpha_{\kappa} (b_0 - b - c) - \alpha_{\kappa} b_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (c + b)}{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \right\} + S_{\kappa}, \\ f_{\kappa}(c+b) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b)}{\alpha_{\kappa}^2 d \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{(-1)^{\kappa} B_i - C_i}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} \left\{ \frac{\beta_i^2 + 3\alpha_{\kappa}^2}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} [\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c - \right. \\ \left. - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (c + b)] - \alpha_{\kappa} b_0 \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c) - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b)}{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} + \right. \\ \left. + \alpha_{\kappa} b \operatorname{ch} \alpha_{\kappa} c - \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b) \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - 2c - b) - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - 2c - 2b)}{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b)} \right\} + t_{\kappa}, \\ \varphi_{\kappa}(c) = \frac{2 \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c}{d \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{(-1)^{\kappa+1} B_i + C_i}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} [\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c) - \\ - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b)] - u_{\kappa}, \\ \varphi_{\kappa}(c+b) = \frac{2 \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - c - b)}{d \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{(-1)^{\kappa+1} B_i + C_i}{\beta_i^2 + \alpha_{\kappa}^2} [\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c - \\ - (-1)^i \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (c + b)] - v_{\kappa},$$

где

$$S_{\kappa} = \frac{\operatorname{sh} \alpha_{\kappa} c}{2 \alpha_{\kappa}^2 \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} b_0} \int_c^{b_0} p_{\kappa}(t) \operatorname{sh} \alpha_{\kappa} (b_0 - t) \left[\frac{1}{\alpha_{\kappa}} + b_0 \operatorname{cth} \alpha_{\kappa} b_0 - c \operatorname{cth} \alpha_{\kappa} c - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - (b_0 - t) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - t) \Big] dt + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - c)}{2 \alpha_k^2 \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^c p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k t \left[\frac{1}{\alpha_k} + b_0 \operatorname{cth} \alpha_k b_0 - \right. \\
& \quad \left. - t \operatorname{cth} \alpha_k t - (b_0 - c) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - c) \right] dt. \\
l_k = & \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (c + b)}{2 \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_{c+b}^{b_0} p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) \left[\frac{1}{\alpha_k} + b_0 \operatorname{cth} \alpha_k b_0 - (c + b) \operatorname{cth} \alpha_k (c + b) - \right. \\
& \quad \left. - (b_0 - t) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - t) \right] dt + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - c - b)}{2 \alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^{c+b} p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k t \left[\frac{1}{\alpha_k} + \right. \\
& \quad \left. + b_0 \operatorname{cth} \alpha_k b_0 - t \operatorname{cth} \alpha_k t - (b_0 - c - b) \operatorname{cth} \alpha_k (b_0 - c - b) \right] dt. \quad (20)
\end{aligned}$$

$$u_k = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k c}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_c^{b_0} p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) dt + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - c)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^c p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k t dt.$$

$$v_k = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (c + b)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_{c+b}^{b_0} p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - t) dt + \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - c - b)}{\alpha_k \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \int_0^{c+b} p_k(t) \operatorname{sh} \alpha_k t dt.$$

Таким образом, решение задачи свелось к нахождению коэффициентов B_k , C_k , $f_k(c)$, $f_k(c + b)$, $\varphi_k(c)$, $\varphi_k(c + b)$ из соотношений (15), (17) и (20).

Займемся исследованием разрешимости последних. С этой целью предварительно преобразуем их. Введя обозначения

$$B_k = \frac{\eta_k - \Theta_k}{2\beta_k b}, \quad C_k = \frac{\eta_k + \Theta_k}{2\beta_k b}, \quad f_k(c) = -\frac{n_k + m_k}{2\sqrt{3} \alpha_k^3 d}, \quad (21)$$

$$f_k(c + b) = \frac{n_k - m_k}{2\sqrt{3} \alpha_k^3 d}, \quad \varphi_k(c) = \frac{2(m_k + n_k) + g_k + h_k}{4\sqrt{3} \alpha_k d},$$

$$\varphi_k(c + b) = \frac{2(m_k - n_k) + g_k - h_k}{4\sqrt{3} \alpha_k d},$$

после некоторых преобразований придем к следующей совокупности бесконечных систем линейных уравнений для определения η_k и Θ_k :

$$\begin{aligned}
\eta_k = & \frac{2\beta_k \operatorname{ch} \frac{\beta_k d}{2}}{\sqrt{3} d (\operatorname{sh} \beta_k d + \beta_k d)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^l}{(\alpha_l^2 + \beta_k^2)^2} \{ [1 - (-1)^k] \cdot [2\alpha_l^2 m_l - \beta_k^2 g_l] + \\
& + [1 + (-1)^k] [2\alpha_l^2 n_l - \beta_k^2 h_l] \} + \gamma_k. \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta_k = & \frac{2\beta_k \operatorname{sh} \frac{\beta_k d}{2}}{\sqrt{3} d (\operatorname{sh} \beta_k d + \beta_k d)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^l}{(\alpha_l^2 + \beta_k^2)^2} \{ [1 - (-1)^k] \cdot [2\alpha_l^2 m_l - \beta_k^2 g_l] + \\
& + [1 + (-1)^k] \cdot [2\alpha_l^2 n_l - \beta_k^2 h_l] \} + \delta_k.
\end{aligned}$$

В свою очередь m_k , n_k , g_k и h_k , входящие в выражения (22), определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 m_k = & \frac{\sqrt{3} \alpha_k}{4b \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \eta_i + [1 + (-1)^k] \Theta_i}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left\{ [1 - (-1)^i] \times \right. \\
 & \times \left[2 \frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{2} \left(\operatorname{ch} \alpha_k \left(b_0 - \frac{b}{2} \right) - \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - 2c - b) \right) - \right. \\
 & - \frac{4\alpha_k b_0}{\operatorname{sh} \alpha_k b_0} \operatorname{sh}^2 \alpha_k \left(c + \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_k b}{2} - 4\alpha_k c \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b) + \\
 & + \alpha_k b (2 \operatorname{sh} \alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - c - b) - \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - 2b))] - \\
 & - [1 + (-1)^i] \operatorname{sh} \alpha_k b \left[\frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \right. \\
 & - \left. \frac{\alpha_k b_0}{\operatorname{sh} \alpha_k b_0} \operatorname{sh} \alpha_k (2c + b) + 2\alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - 2b) \right] \left. \right\} + \lambda_k. \\
 n_k = & \frac{\sqrt{3} \alpha_k}{4b \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \eta_i + [1 + (-1)^k] \Theta_i}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left\{ [1 + (-1)^i] \times \right. \\
 & \times \left[2 \frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\alpha_k^2 + \beta_i^2} \left(\operatorname{sh} \alpha_k \left(b_0 - \frac{b}{2} \right) - \operatorname{sh} \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - 2c - b) \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_k b}{2} - \right. \\
 & - \frac{4\alpha_k b_0}{\operatorname{sh} \alpha_k b_0} \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{ch}^2 \alpha_k \left(c + \frac{b}{2} \right) - 4\alpha_k c \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \\
 & - \alpha_k b (2 \operatorname{sh} \alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - c - b) + \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - 2b)) \left. \right] - \\
 & - [1 - (-1)^i] \operatorname{sh} \alpha_k b \left[\frac{\beta_i^2 + 3\alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \frac{\alpha_k b_0}{\operatorname{sh} \alpha_k b_0} \operatorname{sh} \alpha_k (2c + b) + \right. \\
 & + 2\alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - 2b) \left. \right] \left. \right\} + \mu_k. \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_k = & \frac{\sqrt{3} \alpha_k}{2b \operatorname{sh} \alpha_k b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^k] \eta_i + [1 + (-1)^k] \Theta_i}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left\{ [1 - (-1)^i] \times \right. \\
 & \times \left[2 \frac{\beta_i^2 - \alpha_k^2}{\beta_i^2 + \alpha_k^2} \left(\operatorname{ch} \alpha_k \left(b_0 - \frac{b}{2} \right) - \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - 2c - b) \right) \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{2} + \right. \\
 & + \frac{4\alpha_k b_0}{\operatorname{sh} \alpha_k b_0} \operatorname{sh}^2 \alpha_k \left(c + \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_k b}{2} + 4\alpha_k c \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_k b}{2} \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b) - \\
 & - \alpha_k b (2 \operatorname{sh} \alpha_k c \operatorname{ch} \alpha_k (b_0 - c - b) - \operatorname{sh} \alpha_k (b_0 - 2c - b)) \left. \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [1 + (-1)^i] \operatorname{sh} \alpha_\kappa b \left[\frac{\beta_i^2 - \alpha_\kappa^2}{\beta_i^2 + \alpha_\kappa^2} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) + \frac{\alpha_\kappa b_0}{\operatorname{sh} \alpha_\kappa b_0} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (2c + b) - \right. \\
& \quad \left. - 2\alpha_\kappa \operatorname{ch} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) + \frac{\alpha_\kappa b}{\operatorname{sh} \alpha_\kappa b} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - 2b) \right] \Bigg\} + v_\kappa. \\
h_\kappa = & \frac{\sqrt{3} \alpha_\kappa}{2b \operatorname{sh} \alpha_\kappa b_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^i] \eta_i + [1 + (-1)^i] \Theta_i}{\beta_i^2 + \alpha_\kappa^2} \left\{ [1 + (-1)^i] \times \right. \\
& \times \left[2 \frac{\beta_i^2 - \alpha_\kappa^2}{\beta_i^2 + \alpha_\kappa^2} \left(\operatorname{sh} \alpha_\kappa \left(b_0 - \frac{b}{2} \right) - \operatorname{sh} \frac{\alpha_\kappa b}{2} \operatorname{ch} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) \right) \operatorname{sh} \frac{\alpha_\kappa b}{2} + \right. \\
& + \frac{4\alpha_\kappa b_0}{\operatorname{sh} \alpha_\kappa b_0} \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha_\kappa b}{2} \operatorname{ch}^2 \alpha_\kappa \left(c + \frac{b}{2} \right) + 4\alpha_\kappa \operatorname{ch}^2 \frac{\alpha_\kappa b}{2} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) + \\
& \quad \left. + \alpha_\kappa b (2 \operatorname{sh} \alpha_\kappa \operatorname{ch} \alpha_\kappa (b_0 - c - b) + \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - 2b)) \right] - \\
& - [1 - (-1)^i] \operatorname{sh} \alpha_\kappa b \left[\frac{\beta_i^2 - \alpha_\kappa^2}{\beta_i^2 + \alpha_\kappa^2} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) + \frac{\alpha_\kappa b_0}{\operatorname{sh} \alpha_\kappa b_0} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (2c + b) - \right. \\
& \quad \left. - 2\alpha_\kappa \operatorname{ch} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - b) + \frac{\alpha_\kappa b}{\operatorname{sh} \alpha_\kappa b} \operatorname{sh} \alpha_\kappa (b_0 - 2c - 2b) \right] \Bigg\} + \rho_\kappa.
\end{aligned}$$

В соотношениях (22) и (23) для краткости введены следующие обозначения.

$$\gamma_\kappa = \frac{4\beta_\kappa^2 b (q_\kappa + r_\kappa)}{\operatorname{sh} \beta_\kappa d + \beta_\kappa d} \operatorname{ch}^2 \frac{\beta_\kappa d}{2}, \quad \delta_\kappa = \frac{4\beta_\kappa^2 b (q_\kappa - r_\kappa)}{\operatorname{sh} \beta_\kappa d + \beta_\kappa d} \operatorname{sh}^2 \frac{\beta_\kappa d}{2}.$$

$$\lambda_\kappa = -\sqrt{3} \alpha_\kappa^3 d (s_\kappa + t_\kappa), \quad v_\kappa = -2\sqrt{3} \alpha_\kappa d [u_\kappa + v_\kappa - \alpha_\kappa^2 (s_\kappa + t_\kappa)]. \quad (24)$$

$$\mu_\kappa = -\sqrt{3} \alpha_\kappa^3 d (s_\kappa - t_\kappa), \quad \rho_\kappa = -2\sqrt{3} \alpha_\kappa d [u_\kappa - v_\kappa - \alpha_\kappa^2 (s_\kappa - t_\kappa)].$$

Оценка сумм модулей коэффициентов каждого из уравнений систем (22) и (23) показывает, что эти суммы меньше, чем $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из (24), (16), (18) и (20) видно, что свободные члены уравнений систем (22) и (23) ограничены и убывают со скоростью $\frac{1}{k}$.

Следовательно, совокупность бесконечных систем уравнений (22) и (23) вполне регулярна и, согласно теории регулярных систем⁽⁶⁾, имеет единственное ограниченное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Заметим в скобках, что, как легко видеть, $\eta_\kappa, \Theta_\kappa, \dots, h_\kappa$ с возрастанием k убывают со скоростью не ниже $\frac{1}{k^{0.35}}$.

Как отмечалось выше, коэффициенты $f_\kappa(x)$ ряда (5) убывают со

скоростью $\frac{1}{k^3}$. Последнюю можно усилить, если выделить выражение

$$W_1(x, y) = -\frac{y(d-y)}{6d} [(d+y)S^*(x) + (2d-y)S_0^*(x)].$$

Разлагая это выражение в ряд по $\sin \alpha_k y$ и прибавляя и вычитывая его из (5), получим

$$W(x, y) = -\frac{y(d-y)}{6d} [(d+y)S^*(x) + (2d-y)S_0^*(x)] + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^*(x) \sin \alpha_k y, \quad (25)$$

где $f_k^*(x) = f_k(x) + \frac{2}{\alpha_k^3} [(-1)^k S^*(x) - S_0^*(x)]$.

Ряд в правой части (25) обладает усиленной сходимостью ⁽⁷⁾ — коэффициенты его $f_k^*(x)$ убывают в точках разрыва производной функций $S^*(x)$ и $S_0^*(x)$ со скоростью $\frac{1}{k^4}$, в точках же непрерывности производной — со скоростью $\frac{1}{k^5}$.

Из частных случаев отметим следующие: а) когда $c = b = 0$ — пластинка, опертая всеми четырьмя сторонами. В этом случае совокупность бесконечных систем уравнений вырождается в равенства и решение совпадает с известным решением М. Леви ⁽⁸⁾; б) когда $b_0 = b$. В этом случае бесконечные системы также вырождаются в равенства; в) когда $b_0 \rightarrow \infty$ (полуполоса). В этом случае выражение (11) для $f_k(x)$ примет вид:

$$f_k(x) = \frac{\operatorname{sh} \alpha_k x}{\alpha_k^2 d} \int_x^{\infty} \left[(-1)^k S^*(t) - S_0^*(t) + \frac{d}{2\alpha_k} P_k(t) \right] (1 + \alpha_k t - \alpha_k x \operatorname{cth} \alpha_k x) e^{\alpha_k t} dt + \frac{e^{-\alpha_k x}}{\alpha_k^2 d} \int_0^x \left[(-1)^k S^*(t) - S_0^*(t) + \frac{d}{2\alpha_k} P_k(t) \right] \times \\ \times (1 + \alpha_k x - \alpha_k t \operatorname{cth} \alpha_k d) \operatorname{sh} \alpha_k t dt.$$

Аналогично получаются выражения для $f_k(x)$ в случае бесконечной в обе стороны полосы (когда $c \rightarrow \infty$; $b_0 = c = b \rightarrow \infty$).

Институт математики и механики

Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ս. ՄԻՆԱՍՅԱՆ

Խառը եզրային պայմաններով ուղղանկյունաձև սալի
ծուման մի խնդրի մասին

Հոդվածում արվում է խառը եզրային պայմաններով ուղղանկյունաձև սալի ծուման խնդրի էֆֆեկտիվ լուծումը: Վերջինս արվում է բավականաչափ արագ գուգամետոդ փուլերի շարքի միջոցով: Եզրային պայմաններին բավարարելը բերում է դժային հավասարումների լիովին սեղույաբ առկերջ սխեմաների լուծմանը:

ЛИТЕРАТУРА — ҶУМЊАИ ҲАВША

¹ А. И. Каландия, ПММ, т. XV, в. 3, 1952. ² Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940. ³ Д. И. Шерман, ДАН СССР, т. 101, № 4, 1955. ⁴ В. Новацкий, Бюлл. Польск. АН, отд. 4, 1953. ⁵ А. Е. Love, A treatise of the mathematical theory of Elasticity, New York, 1944. ⁶ Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1950. ⁷ А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, Гостехиздат, 1950. ⁸ Maurice Lévy, C. R., T. 129, 1899, Paris.