ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXI 1955 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Б. Л. Абрамян

Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника

(Представлено Н. Х Арутюняном 30.III.1955)

В работах Л. Файлона ([1]), М. Рибьера ([2]), Ф. Блейха ([3]) и других, посвященных плоской задаче теории упругости, граничные условия задаются только на двух противоположных сторонах прямоугольника, на других же сторонах условия удовлетворяются не полностью. В работах П. Ф. Папковича ([4]), А. И. Лурье ([5]), а также В. К. Прокопова ([6]), были построены решения, позволяющие более точно удовлетворять граничным условиям на поперечных кромках прямоугольника или полосы. В работе М. М. Филоненко-Бородича ([7]) применяются почти ортогональные системы функций для прямоугольника. Этими функциями точно удовлетворяются граничные условия и только в пределе точно бигармоническое уравнение.

В настоящем сообщении рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника при произвольном симметричном относительно осей симметрии загружении кромок прямоугольника нормальными и тангенциальными напряжениями.

Для нахождения точного решения этой задачи она сводится к решению бесконечных систем линейных уравнений. Доказывается, что полученная система вполне регулярна и имеет свободные члены порядка не ниже, чем $\frac{1}{m}$, что позволяет дать эффективное решение данной задачи.

В плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть определены посредством одной бигармонической функции $\varphi(x, y)$.

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}; \qquad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}, \tag{1}$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dx - \nu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\} - ay + b,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dy - \nu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\} + ax + c, \tag{2}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, a, b и c — постоянные.

Бигармоническую функцию $\varphi(x, y)$ представляем в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos\alpha_k x \left\{ A_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k y + B_k^{(1)} \operatorname{sh}\alpha_k y + \alpha_k y (C_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k y + D_k^{(1)} \operatorname{sh}\alpha_k y) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \cos\beta_k y \left\{ A_k^{(2)} \operatorname{ch}\beta_k x + B_k^{(2)} \operatorname{sh}\beta_k x + \beta_k x (C_k^{(2)} \operatorname{ch}\beta_k x + D_k^{(2)} \operatorname{sh}\beta_k x) \right\}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2l}, \qquad \beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2h}, \tag{4}$$

$2l$ — длина прямоугольника, а $2h$ — высота.

В силу симметричности граничных условий на осях симметрии имеем

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = 0. \tag{5}$$

Полагаем также, что напряжения на кромках заданы произвольным образом

$$\begin{aligned} &\sigma_x(l, y) = f_1(y), \qquad \tau_{xy}(l, y) = f_2(y), \qquad (0 \leqslant y \leqslant h), \\ &\sigma_y(x, h) = f_3(x), \qquad \tau_{xy}(x, h) = f_4(x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \end{aligned} \tag{6}$$

где функции f_i — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

Пользуясь соотношениями (1) и (6) и представляя функции f_i в виде рядов Фурье, получим условия

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_{x=l} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\beta_k y; \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right)_{x=l} = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\beta_k y, \quad (0 < y < h), \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_{y=h} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos\alpha_k x; \quad \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}\right)_{y=h} = -\sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin\alpha_k x, \quad (0 < x < l), \tag{8}$$

Удовлетворив условиям (5), (7) и (8), для определения неизвестных получаем соотношения

$$-\beta_k^2 (A_k^{(2)} \operatorname{ch}\beta_k l + D_k^{(2)} \beta_k l \operatorname{sh}\beta_k l) = a_k, \tag{9}$$

$$b_p - \beta_p^2 [A_p^{(2)} \operatorname{sh}\beta_p l + D_p^{(2)} (\operatorname{sh}\beta_p l + \beta_p l \operatorname{ch}\beta_p l)] =$$

$$= \frac{2}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k^2}{\alpha_k^2 + \beta_p^2} \left[A_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k h + D_k^{(1)} (2 \operatorname{ch}\alpha_k h + \alpha_k h \operatorname{sh}\alpha_k h) \right] -$$

$$- \frac{4}{h} (-1)^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_k^4}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2} D_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k h, \tag{10}$$

$$-\alpha_k^2 (A_k^{(1)} \operatorname{ch}\alpha_k h + D_k^{(1)} \alpha_k h \operatorname{sh}\alpha_k h) = c_k, \tag{11}$$

$$d_p - \alpha_p^2[A_p^{(1)}\operatorname{sh}\alpha_p h + D_p^{(1)}(\operatorname{sh}\alpha_p h + \alpha_p h\operatorname{ch}\alpha_p h)] =$$

$$= \frac{2}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_k^2}{\beta_k^2+\alpha_p^2}[A_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l + D_k^{(2)}(2\operatorname{ch}\beta_k l +$$

$$+ \beta_k l\operatorname{sh}\beta_k l)] - \frac{4}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_k^4}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}D_k^{(2)}\operatorname{ch}\beta_k l. \quad (12)$$

Имеем также

$$B_k^{(2)} = C_k^{(2)} = B_k^{(1)} = C_k^{(1)} = 0, \quad \text{и} \quad a = b = c = 0. \quad (13)$$

При этом использованы разложения

$$\operatorname{sh}\alpha_k y = \frac{2\alpha_k\operatorname{ch}\alpha_k h}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{\beta_p^2+\alpha_k^2}, \quad (0 < y < h), \quad (14)$$

$$\operatorname{ch}\alpha_k y = \frac{2\alpha_k\operatorname{sh}\alpha_k h}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{\beta_p^2+\alpha_k^2} + \frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p\sin\beta_p y}{\beta_p^2+\alpha_k^2}, \quad (0 \leqslant y \leqslant h), \quad (15)$$

$$y\operatorname{ch}\alpha_k y = \frac{2}{h}(\operatorname{ch}\alpha_k h + \alpha_k h\operatorname{sh}\alpha_k h)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{\beta_p^2+\alpha_k^2} -$$

$$- \frac{4\alpha_k^2\operatorname{ch}\alpha_k h}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}, \quad (0 \leqslant y \leqslant h), \quad (16)$$

$$y\operatorname{sh}\alpha_k y = \frac{2}{h}(\operatorname{sh}\alpha_k h + \alpha_k h\operatorname{ch}\alpha_k h)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{\beta_p^2+\alpha_k^2} -$$

$$- \frac{4\alpha_k}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p\sin\beta_p y}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2} - \frac{4\alpha_k^2\operatorname{sh}\alpha_k h}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}\sin\beta_p y}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}, \quad (0 \leqslant y < h), \quad (17)$$

а также аналогичные разложения для функций $sh\beta_k x$, $ch\beta_k x$, $xch\beta_k x$ и $xsh\beta_k x$ на интервале $(0, l)$.

Исключив из соотношений (9)—(12) неизвестные $A_k^{(1)}$ и $A_k^{(2)}$, получаем совокупность бесконечных систем линейных уравнений ([8]):

$$D_p^{(1)}\alpha_p^2\left(\operatorname{sh}\alpha_p h + \frac{\alpha_p h}{\operatorname{ch}\alpha_p h}\right) = d_p + c_p\operatorname{th}\alpha_p h +$$

$$+ \frac{2}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_k a_k}{\beta_k^2+\alpha_p^2} - \frac{4\alpha_p^2}{l}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_k^2\operatorname{ch}\beta_k l}{(\beta_k^2+\alpha_p^2)^2}D_k^{(2)},$$

$$D_p^{(2)}\beta_p^2\left(\operatorname{sh}\beta_p l + \frac{\beta_p l}{\operatorname{ch}\beta_p l}\right) = b_p + a_p\operatorname{th}\beta_p l + \frac{2}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k c_k}{\beta_p^2+\alpha_k^2} -$$

$$-\frac{4\beta_p^2}{h}(-1)^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\alpha_k^2\operatorname{ch}\alpha_k h}{(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}D_k^{(1)}. \tag{18}$$

Введя новые неизвестные

$$\frac{l}{h}(-1)^{k+1}\alpha_k^2\operatorname{ch}\alpha_k hD_k^{(1)}=X_k, \qquad (-1)^{k+1}\beta_k^2\operatorname{ch}\beta_k lD_k^{(2)}=Y_k, \tag{19}$$

совокупность (18) приведем к виду:

$$\left.\begin{aligned} X_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk}Y_k+N_p,\\ Y_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{pk}X_k+M_p, \end{aligned}\right\} \qquad (p=1,\ 2,\cdots), \tag{20}$$

где введены следующие обозначения:

$$a_{pk}=-\frac{4\alpha_p^2\beta_k}{h\left(\operatorname{th}\alpha_p h+\dfrac{\alpha_p h}{\operatorname{ch}^2\alpha_p h}\right)}\frac{1}{(\beta_k^2+\alpha_p)^2} \qquad \begin{aligned}(k&=1,\ 2,\cdots;\\ p&=1,\ 2,\cdots),\end{aligned} \tag{21}$$

$$b_{pk}=-\frac{4\beta_p^2\alpha_k}{l\left(\operatorname{th}\beta_p l+\dfrac{\beta_p l}{\operatorname{ch}^2\beta_p l}\right)}\frac{1}{(\alpha_k^2+\beta_p)^2} \qquad \begin{aligned}(k&=1,\ 2,\cdots;\\ p&=1,\ 2,\cdots),\end{aligned} \tag{22}$$

$$N_p=\frac{1}{\operatorname{th}\alpha_p h+\dfrac{\alpha_p h}{\operatorname{ch}^2\alpha_p h}}\left[\frac{l}{h}(-1)^{p+1}(d_p+c_p\operatorname{th}\alpha_p h)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{h}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\beta_\kappa a_\kappa}{\beta_\kappa^2+\alpha_p^2}\right], \qquad (p=1,\ 2,\cdots), \tag{23}$$

$$M_p=\frac{1}{\operatorname{th}\beta_p l+\dfrac{\beta_p l}{\operatorname{ch}^2\beta_p l}}\left[(-1)^{p+1}(b_p+a_p\operatorname{th}\beta_p l)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{h}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa+1}\alpha_\kappa c_\kappa}{\alpha_\kappa^2+\beta_p^2}\right]. \qquad (p=1,\ 2,\cdots). \tag{24}$$

Совокупность (20) можно написать в виде одного ряда уравнений:

$$F_m=\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}F_n+B_m, \qquad (m=1,\ 2,\cdots), \tag{25}$$

если ввести обозначения

$$Z_{2p} = X_p, \qquad Z_{2p-1} = Y_p, \qquad B_{2p} = N_p, \qquad B_{2p-1} = M_p, \qquad (p = 1,\ 2, \ldots), \tag{26}$$

$$A_{2p,\,2k-1} = a_{pk}, \quad A_{2p-1,\,2k} = b_{pk}, \quad A_{2p,\,2k} = A_{2p-1,\,2k-1} = 0$$

$$(p = 1,\ 2, \ldots; \quad k = 1,\ 2, \ldots).$$

Пользуясь обозначениями (21) — (24) и (26), покажем, что система (25) вполне регулярна.

Рассмотрим отдельно два случая:

а) Пусть $m = 2p - 1$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2p-1,\,n}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| = \frac{4\beta_p^2}{l\left(\operatorname{th}\beta_p l + \frac{\beta_p l}{\operatorname{ch}^2\beta_p l}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k^2 + \beta_p^2)^2}. \tag{27}$$

Оценим ряд $\sum\limits_{k=1,3}^{\infty} \frac{k}{(k^2+a^2)} = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^3 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(\alpha_k + \beta_p)^2} \quad \left(a = \frac{2\beta_p l}{\pi}\right)$

пользуясь формулой трапеции, как это сделано у П. С. Бондаренко*

$$\sum_{k=1,3\ldots}^{\infty} \frac{k}{(k^2+a^2)^2} = \frac{1}{2(1+a^2)^2} + \left[\frac{1}{2(1+a^2)^2} + \sum_{k=3,5,\ldots}^{\infty} \frac{k}{(k^2+a^2)^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2(1+a^2)^2} + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2(1+a^2)}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+a^2}\right]. \tag{28}$$

Подставляя эту оценку в (27), будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2p-1,\,n}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| \leqslant \frac{8\beta_p^2 l^2 (3\pi^2 + 4\beta_p^2 l^2)}{\pi\left(\operatorname{th}\beta_p l + \frac{\beta_p l}{\operatorname{ch}^2\beta_p l}\right)\left(\pi^2 + 4\beta_p^2 l^2\right)^2}. \tag{29}$$

Правая часть (29) зависит от значений $\beta_p l$, она получает свое максимальное значение при $\beta_p l \approx 3{,}363$, которое равняется 0.7003.

Таким образом, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2p-1,\,n}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{pk}| \leqslant 0.7003. \tag{30}$$

б) Аналогичным образом при $m = 2p$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{2p,\,n}| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{pk}| = \frac{4\alpha_p^2}{h\left(\operatorname{th}\alpha_p h + \frac{\alpha_p h}{\operatorname{ch}^2\alpha_p h}\right)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(\beta_k^2 + \alpha_p^2)^2} \leqslant 0{,}7003, \tag{31}$$

Из оценок (30) и (31) следует, что система (25) вполне регулярна.

---

* См ([8]) стр. 81.

Легко видеть, что свободные члены системы (25) имеют порядок не ниже, чем $\frac{1}{m}$:

$$|B_m| = O\left(\frac{1}{m}\right). \tag{32}$$

В заключение отметим, что аналогичным образом можно получить решение также и для случая, когда напряжения заданы на кромках произвольно и не симметрично относительно осей симметрии прямоугольника.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

Ուղղանկյան համար առաձգականության տեսության հարթ խնդրի մի դեպքի վերաբերյալ

Հոդվածում դիտվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար երբ ուղղանկյան եզրերը կամավոր կերպով բեռնավորված են նորմալ և շոշափող լարումներով սիմետրիայի առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ ձևով։

Խնդրի ճիշտ լուծումը գտնելու համար նա բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ապացուցվում է, որ ստացված սիստեմը լիովին ռեգուլյար է և ունի ազատ անդամներ, որոնց նվազման կարգը $\frac{1}{m}$-ից ցածր չէ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. Файлон*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. «A», Vol. 201, 1903. [2] *М. Рибьер*, Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles, Bordeaux (1899, а также C. R., 126, p. 402, 1190). [3] *Ф. Блейх*, Bauingeneur, 1923, Heft 9 und 10. [4] *П. Ф. Папкович*, ДАН СССР, т. 27, № 4, 1940, стр. 335. [5] *А. И. Лурье*, ПММ, том VI, в. 2—3, 1942, стр. 151. [6] *В. К. Прокопов*, ПММ, том XVI, вып. I, 1952, стр. 45. [7] *М. М. Филоненко-Бородич*, ПММ, том X, вып. I, 1946. [8] *Л. В. Канторович* и *В. И. Крылов*, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, М.—Л., 1950.