ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXI 1955 4

МАТЕМАТИКА

А. Б. Тавадян

О полноте полиномов многих переменных при взвешенно-квадратичном приближении

(Представлено А. Л. Шагиняном 10. V. 1955)

1°. В настоящей заметке устанавливаются некоторые результаты о полноте полиномов при взвешенно-квадратическом приближении в n-мерном пространстве. При этом мы существенно будем опираться на следующий результат, принадлежащий М. М. Джрбашяну.

Отнесем к классу A функцию $p(x)$, которая определена на полуоси $[0, +\infty)$, и представим в виде

$$p(x) = p(1) + \int_1^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt, \quad \text{при} \quad x \geqslant 1,$$

где функция $\omega(t)$ неотрицательная, не убывает и

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t) = +\infty.$$

Условимся говорить, что на $(-\infty, +\infty)$ измеримая функция $q(x) \geqslant 0$ принадлежит классу $A[p(x)]$, если существует функция $p(x)$, принадлежащая классу, так что

$$q(x) \geqslant p(|x|) \text{ при } |x| \geqslant R_0.$$

Отнесем к классу $L_2[q(x)]$ все функции, определенные и измеримые на $(-\infty, +\infty)$, для которых интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q(x)} |f(x)|^2 dx$$

существуют.

Тогда имеет место следующая теорема ([1]).

Теорема (*a*). *Если* $f(x) \in L_2[q(x)]$ *и*

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx = +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q(x)} f(x) x^n dx = 0, \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots),$$

то $f(x) = 0$ *почти всюду на* $(-\infty,\ +\infty)$.

Отсюда и из теоремы Рисс-Фишера следует полнота полиномов в классе $L_2[q(x)]$, при взвешенно-квадратичном приближении на всей оси $(-\infty,\ +\infty)$, в смысле

$$\inf_{\{Q_n\}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q(x)} | f(x) - Q_n(x) |^2 dx = 0,$$

где $\{Q_n(x)\}$ всевозможные полиномы.

2°. Скажем, что функции $p_k(x_k)$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, которые определены на полуоси $[0,\ +\infty)$, принадлежат классу A, если их можно представить в виде

$$p_k(x_k) = p_k(1) + \int_1^{x_k} \frac{\omega_k(u_k)}{u_k} du_k, \qquad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n), \tag{1}$$

где неотрицательные функции $\omega_k(u_k)$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$ не убывают и

$$\lim_{u_k \to \infty} \omega_k(u_k) = +\infty, \qquad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n).$$

Нетрудно показать, что при этом интегралы

$$M_{m_k} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_k(x_k)} x_k^{m_k} dx_k, \quad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n;\ m_k = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{2}$$

существуют.

В самом деле, так как функции $\omega_k(x_k)$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, монотонно возрастая, стремятся к бесконечности, то при данных m_k, $(m_k = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$ и $x_k \geqslant x_k^0(m_k)$ будем иметь $\omega_k(x_k) \geqslant m_k + 2$ $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$. Поэтому из (1) следует

$$p_k(x_k) > c_k + (m_k + 2) \lg x_k, \qquad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n), \tag{3}$$

где c_k, $(k = 1,\ 2, \cdots n)$ постоянные величины. Отсюда следует наше утверждение.

Условимся говорить, что функции $q_k(x_k) \geqslant 0$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, определенные и измеримые на оси $(-\infty,\ +\infty)$, принадлежат классам $A[p_k(x_k)]$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, если существуют функции $p_k(x_k)$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, принадлежащие классу A, так что

$$q_k(x_k) \geqslant p_k(|x_k|), \text{ при } |x_k| \geqslant R_0, \qquad (k = 1,\ 2, \cdots,\ n). \tag{4}$$

Из (4) следует, что если $q_k(x_k) \in A[p_k(x_k)]$, $(k = 1,\ 2, \cdots,\ n)$, то интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q_k(x_k)}\, x_k^{m_k} dx_k, \quad (k = 1, 2, \cdots, n;\ m_k = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

абсолютно сходятся.

Пусть $q_k(x_k) \in A[p_k(x_k)]$; $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Отнесем к классу $L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$ все функции $f(x_1, \cdots, x_n)$, определенные во всем n-мерном пространстве $B_n : (-\infty < x_k < +\infty,\ k = 1, 2, \cdots, n)$, для которых

$$\int \cdots \int_{B_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n < +\infty. \tag{6}$$

Мы скажем, что система полиномов от переменных $x_1 \cdots, x_n$ полна в области B_n, если для любой функции

$$f(x_1, \cdots, x_n) \in L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$$

$$\inf_{\{Q\}} \int \cdots \int_{B_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \cdots, x_n) - Q(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n = 0, \tag{7}$$

где $\{Q(x_1, \cdots, x_n)\}$ всевозможные полиномы от переменных $x, \cdots, x_n$.

Теорема 1. Если $q_k(x_k) \in A[p_k(x_k)]$ *и*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{p_k(x_k)}{x_k^2} dx_k = +\infty, \quad (k = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

то система полиномов полна в классе $L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основывается на теореме (a). По теореме Рисс-Фишера достаточно показать, что если для некоторой функции $f(x_1, \cdots, x_n) \in L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x_k)} f(x_1, \cdots, x_n) x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} dx_1 \cdots dx_n = 0, \tag{9}$$

где $m_1, \cdots, m_n$ независимо друг от друга принимают всевозможные значения 0, 1, 2, $\cdots$, то $f(x_1, \cdots, x_k) = 0$ почти всюду в области B_n.

В самом деле, пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_2[q_1(x_1), \ldots, q_n(x_n)]$ и имеет место (9), тогда по теореме Фубини из выражения (9) можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q_1(x_1)} x_1^{m_1} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=2}^{n} q_k(x_k)} f(x_1, \ldots, x_n) x_2^{m_2} \ldots$$

$$\ldots x_n^{m_n} dx_2 \ldots dx_n = 0.$$

Для фиксированных $m_2, \ldots, m_n$, обозначая

$$F_{m_2, \ldots, m_n}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=2}^{n} q_k(x_k)} f(x_1, \ldots, x_n) x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} dx_2 \ldots dx_n, \quad (10)$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q_1(x_1)} F_{m_2, \ldots, m_n}(x_1) x_1^{m_1} dx_1 = 0, \ (m_1 = 0, 1, 2, \ldots). \quad (11)$$

Покажем, что $F_{m_2, \ldots, m_n}(x_1) \in L_2[q_1(x_1)]$ на всей оси $(-\infty, +\infty)$ при всевозможных значениях $m_2, \ldots, m_n = 0, 1, 2, \ldots$

В самом деле, по неравенству Буняковского

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q_1(x_1)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=2}^{n} q_k(x_k)} f(x_1, \ldots, x_n) x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n} dx_2 \ldots dx_n \right\}^2 dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q_1(x_1)} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=2}^{n} q_k(x_k)} x_2^{2m_2} \ldots x_n^{2m_n} dx_2 \ldots dx_n \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=2}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_2 \ldots dx_n \right\} dx_1 =$$

$$= C(m_1, \ldots, m_n) \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= C_1(m_1, \ldots, m_n).$$

Поэтому из (11), в силу (8), по теореме A, следует $F_{m_2,\ldots,m_n}(x_1)=0$, за исключением множества $E_{m_2,\ldots,m_n}$, $\text{mes}\, E_{m_2\ldots m_n}=0$, оси $-\infty<x_1<+\infty$. Обозначим

$$E_1=\sum_{m_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=0}^{\infty}E_{m_2,\ldots,m_n},$$

тогда $\text{mes}\, E_1=0$ и можем утверждать, что если $x_1 \overline{\in} E_1$, то

$$F_{m_2,\ldots,m_n}(x_1)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{k=2}^{n}q_k(x_k)}f(x_1,\ldots,x_n)\,x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n}dx_2\ldots dx_n=0, \tag{12}$$

при всевозможных значениях $m_2,\ldots,m_n=0,1,2,\ldots$

К выражению (12) снова применяя теорему Фубини, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-q_2(x_2)}x_2^{m_2}dx_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{k=3}^{n}q_k(x_k)}f(x_1,\ldots,x_n)x_3^{m_3}\ldots x_n^{m_n}dx_3\ldots dx_n=0,$$

если $x_1\in(-\infty,+\infty)-E_1$, $(m_2,\ldots,m_n=0,1,2,\ldots)$.

Для фиксированных $m_3,\ldots,m_n$, обозначая

$$F_{m_3,\ldots,m_n}(x_1,x_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\sum\limits_{k=3}^{n}q_k(x_k)}f(x_1,\ldots,x_n)x_3^{m_3}\ldots x_n^{m_n}dx_3\ldots dx_n,$$

имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-q_2(x_2)}F_{m_3,\ldots,m_n}(x_1,x_2)x_2^{m_2}dx_2=0,\quad (m_2=0,1,2,\ldots), \tag{13}$$

если $x_1\in(-\infty,+\infty)-E_1$.

Здесь $F_{m_3,\ldots,m_n}(x_1,x_2)$, как функция от x_2, принадлежит классу $L_2[q_2(x_2)]$. Поэтому из (13), в силу (8), по теореме (a), следует, что при $x_1\overline{\in} E_1$ $F_{m_3,\ldots,m_n}(x_1,x_2)=0$, за исключением множества $E_{m_3,\ldots,m_n}$; $\text{mes}E_{m_3,\ldots,m_n}=0$, оси $-\infty<x_2<+\infty$, $(m_3,\ldots,m_n=0,1,2,\ldots)$.

Обозначим

$$E_2=\sum_{m_3=0}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=0}^{\infty}E_{m_3,\ldots,m_n},\quad (\text{mes}E_2=0).$$

Далее: обозначим через $E^{(1,2)}$ множество плоскости (x_1, x_2), проекции которого на оси x_1 и x_2 совпадают со множествами E_1 и E_2 соответственно. Очевидно, что $\operatorname{mes} E^{(1,2)} = 0$. Тогда из вышесказанного следует, что $F_{m_3, \ldots, m_n}(x_1, x_2) = 0$, если точка $(x_1, x_2) \overline{\in} E^{(1,2)}$, при всевозможных значениях $m_3, \ldots, m_n = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{k=3}^{n} q_k(x_k)} f(x_1, \ldots, x_n) x_3^{m_3} \ldots x_n^{m_n} dx_3 \ldots dx_n = 0, \tag{14}$$

при $m_3, \ldots, m_n = 0, 1, 2, \ldots$, если $(x_1, x_2) \overline{\in} E^{(1,2)}$.

После таких $n-3$ шагов, из (14) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-q_n(x_n)} x_n^{m_n} dx_n = 0, \qquad (m_n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{15}$$

кроме $n-1$-мерного множества пространства $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $E^{(1,2,\ldots,n-1)}$, $\operatorname{mes} E^{(1,2,\ldots,n-1)} = 0$, проекции которого на оси $x_1, \ldots, x_{n-1}$ совпадают со множествами $E_1, \ldots, E_{n-1}$ соответственно.

Из выражения (15) по теореме (a) следует, что $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, когда точка $(x_1, \ldots, x_n) \overline{\in} E^{(1,2,\ldots,n-1)}$, кроме множества E_n, $\operatorname{mes} E_n = 0$ оси $-\infty < x_n < +\infty$.

Таким образом $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ за исключением n-мерного множества $E = E^{(1,2,\ldots,n)}$, $\operatorname{mes} E = 0$, пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, проекции которого на оси $x_1, \ldots, x_n$ совпадают со множествами $E_1, \ldots, E_n$ соответственно, $\operatorname{mes} E_k = 0$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Теорема доказана.

Что касается необходимости условий (8) теоремы, то из теоремы А. Л. Шагиняна [2] о неполноте системы полиномов [см. также [3]] немедленно следует, что если хоть одна из функций $q_k(x_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, скажем $q_1(x_1)$, удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q_1(x_1)}{1+x^2} dx_1 < +\infty,$$

тогда система полиномов не полна в B_n.

3°. *Обобщение теоремы* 1. Пусть функции $p_k(x_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, \mu + \nu)$ принадлежат классу A. Условимся говорить, что функции $q_k(x_k) \geqslant 0$, $(k = 1, 2, \ldots, \mu)$ и $q_i^*(x_i) \geqslant 0$, $(i = \mu + 1, \ldots, \mu + \nu)$, определенные соответственно на оси $(-\infty, +\infty)$ и полуоси $[0, +\infty)$, ограничены в любой их конечной части, принадлежат классам, если существуют функции $p_k(x_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, \mu + \nu)$, принадлежащие классу A, так, что

$$q_k(x_k) \geqslant p_k(|x_k|) \quad \text{при} \quad |x_k| \geqslant R_1, \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

$$q_i^*(x_i) \geqslant p_i(x_i) \quad \text{при} \quad x_i \geqslant R_1, \quad (i = \mu + 1, \ldots, \mu + \nu).$$

Отнесем к классу $L_2[q_\mu(x_\mu), q^*_{\mu+\nu}(x_{\mu+\nu}); 0]$ все функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенные в n-мерной области D_n: $(-\infty < x_k < +\infty,\ k = 1, 2, \ldots, \mu;\ 0 \leqslant x_i < +\infty,\ i = \mu + 1, \ldots, \mu + \nu;\ a_r \leqslant x_r \leqslant b_r,\ r = \mu + \nu + 1, \ldots, n)$, для которых существуют интегралы

$$\int \ldots \int\limits_{D_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{\mu} q_k(x_k) - \sum\limits_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} q_i^*(x_i)} |f(x_1, \ldots, x_n)|^2 dx_1 \ldots dx_n.$$

Мы скажем, что система полиномов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ полна в области D_n, если для любой функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in L_2[q_\mu(x_\mu);\ q^*_{\mu+\nu}(x_{\mu+\nu});\ 0]$$

$$\inf_{\{Q\}} \int \ldots \int\limits_{D_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{\mu} q_k(x_k) - \sum\limits_{i=\mu+1}^{\mu+\nu} q_i(x_i)} |f(x_1, \ldots, x_n) -$$
$$- Q(x_1, \ldots, x_n|^2 dx_1 \ldots dx_n = 0,$$

где $\{Q(x_1, \ldots, x_n)\}$ всевозможные полиномы от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Имеет место следующая теорема, доказательство которой опускаем.

Теорема 2. *Если*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_k(x_k)}{x_k^2} dx_k = +\infty, \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu),$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_i(x_i)}{x_i^{3/2}} dx_i = +\infty, \quad (i = \mu + 1, \ldots, \mu + \nu),$$

то система полиномов полна в классе $L_2[q_\mu(x_\mu);\ q^*_{\mu+\nu}(x_{\mu+\nu});\ 0]$.

Ереванский государственный университет
им. В. М. Молотова

Ա. Բ. ԹԱՎԱԴՅԱՆ

Շատ փոփոխականներից կախված բազմանդամների լրիվությունը միջին կշռային մոտավորության դեպքում

Կասենք $p_k(x_k)$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *ֆունկցիաները, որոնք որոշված են* $[0, +\infty)$ *կիսաառանցքի վրա, պատկանում են* A *դասին, եթե նրանց կարելի է ներկայացնել հետևյալ ձևով*

$$p_k(x_k) = p_k(1) + \int\limits_1^{x_k} \frac{\omega_k(u_k)}{u_k}\, du_k, \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

որտեղ ոչ բացասական $\omega_k(u_k)$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *ֆունկցիաները չեն նվազում և*

$$\lim_{u_k \to \infty} \omega_k(u_k) = +\infty, \ (k=1, 2, \cdots, n)։$$

Պայմանավորվենք ասել, որ $(-\infty, +\infty)$ *առանցքի վրա չափելի* $q_k(x_k)$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *ֆունկցիաները պատկանում են* $A[p_k(x_k)]$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *դասերին, եթե գոյություն ունեն* A *դասին պատկանող* $p_k(x_k)$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *ֆունկցիաները, այնպես որ՝*

$$q_k(x_k) \geq p_k(|x_k|), \quad \text{երբ} \quad |x_k| \geq R_0, \quad (k=1, 2, \cdots, n)$$

Վերագրենք $L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$ *դասին բոլոր* $f(x_1, \cdots, x_n)$ *ֆունկցիաները, որոնք որոշված են ամբողջ* n*-չափանի* B_n: $(-\infty < x_k < +\infty,\ k=1, 2, \cdots, n)$ *տարածության մեջ և բավարարում են*

$$\int \cdots \int\limits_{B_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n < +\infty,$$

պայմանին։

Այդ դեպքում տեղի ունի

Թեորեմ.—*Եթե* $q_k(x_k) \in A[p_k(x_k)]$, $(k=1, 2, \cdots, n)$ *և*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{p_k(x_k)}{x_k^2} dx_k = +\infty, \ (k=1, 2, \cdots, n),$$

ապա բազմանդամների սիստեմը լրիվ է $L_2[q_1(x_1), \cdots, q_n(x_n)]$ *դասում, հետևյալ իմաստով*

$$\inf_{\{Q\}} \int \cdots \int\limits_{B_n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x_k)} |f(x_1, \cdots, x_n) - Q(x_1, \cdots, x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

որտեղ $\{Q(x_1, \cdots, x_n)\}$ *ներկայացնում են* $x_1, \cdots, x_n$ *փոփոխականներից կախված բոլոր հնարավոր բազմանդամների սիստեմը։*

Հոդվածում բերվում է թեորեմի ընդհանրացումը n*-չափանի ավելի ընդհանուր տիրույթների համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН АрмССР, т. 7, № 1 (1947). [2] *А. Л. Шагинян*, Сообщ. Ин-та матем. и мех АН АрмССР, вып. 1 (1947). [3] *М. М. Джрбашян*, Мат. сб., т. 36 (78), № 3 (1955), гл. 1, § 3.