ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXI 1955 4

МАТЕМАТИКА

В. А. Оганесян

О полупростоте системной алгебры*

(Представлено А. Л. Шагиняном 12. II. 1955)

Пусть R некоторая конечная ассоциативная система, удовлетворяющая следующим аксиомам.

1. Иденпотентные элементы в R между собой перестановочны.
2. Для каждого элемента $x \in R$ в R существует такой y, что

$$xyx = x.$$

Если взять поле P с характеристикой 0 и на систему R натянуть векторное пространство, то, имея в виду таблицу умножения в системе R, это векторное пространство будет алгеброй над полем P.

Эту алгебру мы называем *системной алгеброй* и обозначаем через R_P.

Известно, что если вместо системы R взять конечную группу и над полем P построить групповую алгебру этой группы, то последняя алгебра полупростая.

Аналогичная теорема верна и для системной алгебры.

Теорема — Системная алгебра полупроста.

В доказательстве мы будем пользоваться терминами и обозначениями, которые были употреблены в статьях ([1,2]).

Доказательство: докажем теорему от противного, причем систему R будем считать системой частичных подстановок ([2]). Допустим, что системная алгебра R_P не полупростая, тогда она обладает корневой величиной:

$$t = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i t_i,$$ отличной от нулевого элемента 0 алгебры R_P.

Так как $t \neq 0$ и $t_1, t_2, \dots t_n$ — различные подстановки из R, то хотя бы один коэффициент $\alpha_k \neq 0$.

Среди отличных от 0 слагаемых $\alpha_i t_i$ в выражении t существуют такие слагаемые, компоненты которых имеют максимальную длину.

---

*Данная работа является параграфом диссертационной работы, защищенной автором 25. XII. 1953 г. в МГУ.

Пусть для определенности $d_1 t_1$ является одним из таких слагаемых и пусть длина t равна m, тогда $te_{t_1^{-1}} = \sum d_i t_i e_{t_1^{-1}}$ принадлежит радикалу и поэтому является либо нулем, либо корневой величиной. Однако $t_1 e_{t_1^{-1}} \neq 0$.

Так как в сумме $\sum d_i t_i$ все компоненты t_i различны и при умножении на $e_{t_1^{-1}}$ они либо остаются без изменения, либо их длина уменьшается, то $d_1 t_1$, как оставшееся неизмененное слагаемое, будет опять отлично от нуля и от остальных слагаемых, и поэтому $te_{t_1^{-1}} \neq 0$.

Произведение $t_1^{-1} te_{t_1^{-1}}$ принадлежит радикалу и поэтому является либо нулем, либо корневой величиной.

Так как в сумме:

$$\sum d_i t_1^{-1} t_i e_{t_1^{-1}}$$

только первое слагаемое, а именно: $d_1 t_1^{-1} t_1 e_{t_1^{-1}} = d_1 e_{t_1^{-1}}$, имеет компонент $e_{t_1^{-1}}$, то $t_1^{-1} t e_{t_1^{-1}} \neq 0$. Обозначим элемент $t_1^{-1} t e_{t_1^{-1}} \in R_p$ через S и разобьем $S = \sum d_i t_1^{-1} t_i e_{t_1^{-1}}$ на две суммы, одна из которых состоит из слагаемых, компоненты которых имеют длину m, другая из слагаемых с компонентами меньшей длины:

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Мы показали, что $S = \Sigma_1 + \Sigma_2 \neq 0$ является корневой величиной в системной алгебре R_p.

Компоненты в сумме Σ_1 являются обычными подстановками длины m, что следует из равенства

$$e_{t_1^{-1}} \cdot (\Sigma_1) \cdot e_{t_1^{-1}} = \Sigma_1,$$

кроме этого, из последнего следует, что компоненты в сумме Σ_1 *одновременно* принадлежат одной из групп цепи m-го слоя системы R, и поэтому Σ_1 является элементом групповой алгебры этой группы.

Если a произвольный элемент из этой групповой алгебры, то $a \cdot S$ — нильпотентный элемент алгебры R_p, поэтому:

$$(a\,\Sigma_1 + a\,\Sigma_2)^q = 0,$$

раскрывая скобки, получим:

$$(a\,\Sigma_1)^q + \Sigma_2' = 0,$$

компоненты Σ_2' имеют длину, меньшую m, поэтому $(a\ \Sigma_1)^q = 0$.

Таким образом, элемент $\Sigma_1 \neq 0$ является корневой величиной групповой алгебры, построенной для вышеуказанной группы m-го слоя.

Но наличие отличных от нуля корневых величин в групповой алгебре противоречит теореме о полупростоте последней, т. е. наше допущение неполупростоты системной алгебры R_P приводит к противоречию.

Этим теорема доказана.

Отметим, что все теоремы о полупростых алгебрах верны для системной алгебры, в частности, всякое представление системы R вполне приводимо. Отсюда следует теорема Бернсайда.

В конце приведем пример коммутативной, ассоциативной системы, для которой соответствующая алгебра неполупростая. При этом элементами ассоциативной системы могут служить даже частичные подстановки, но только в этой „системе“ не всякая частичная подстановка обладает обратной подстановкой. Иными словами аксиома (3) в определении системы является необходимым условием для полупростоты системной алгебры.

Таблица умножения этого примера следующая:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_2	a_3	a_4	a_4	a_4
a_2	a_3	a_4	a_4	a_4	a_4
a_3	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_4	a_4	a_4	a_4	a_4	a_4
a_5	a_4	a_4	a_4	a_4	a_5

Элемент $a_3 - a_4 \neq 0$, но, как видно из таблицы умножения этот элемент является корневой величиной для системной алгебры этой „системы“.

Армянский государственный заочный
педагогический институт.

Վ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Սիստեմային հանրահաշվի կիսապարզության մասին

Հոդվածում ապացուցվում է 0 բնութագիր ունեցող դաշտի վրա սիստեմային հանրահաշվի կիսապարզությունը, ըստ որում, սիստեմ կոչվում է այն կիսախումբը, որի մեջ տեղի ունեն հետևյալ երկու պայմանները.

1. Կիսախմբի իդեմպոտենտ էլեմենտները իրար հետ տեղափոխելի են։

2. Կիսախմբի ամեն մի x էլեմենտի համար կիսախմբում գոյություն ունի այնպիսի y էլեմենտ, որ՝

$$xyx = x։$$

Վերջում բերվում է ոչ կիսապարզ հանրահաշվի օրինակ, որը կառուցված է միայն 1-ին պայմանին բավարարող կիսախմբով, 0-բնութագրով P դաշտի վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. А. Оганесян*, Сбор. науч. трудов Арм. гос. заоч. techинститута, № 1, 1954.
[2] *В. А. Оганесян*, Сб. науч. трудов. Арм. гос. заоч. пединститута, № 2, 1955.