ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXI 1955 3

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

К вопросу о распределении атмосферного давления по поверхности Земли в случае незональной циркуляции атмосферы

(Представлено И. В. Егиазаровым 16.IV.1955).

А. А. Дородницын [1] решил задачу о распределении давления по поверхности земли в случае стационарной зональной циркуляции реальной атмосферы, положив в основу систему уравнений Н. Е. Кочина [2]. В этой задаче коэффициент турбулентной кинематической вязкости считался постоянным.

О. С. Берлянд [3] решил ту же задачу, приняв коэффициент турбулентной кинематической вязкости линейной функцией высоты. Температура считалась известной и определялась из работы [4].

В настоящей работе решается задача о распределении атмосферного давления на поверхности Земли в случае незональной циркуляции атмосферы, причем процесс считается квазистационарным.

Исходим из следующей сисмемы уравнений [2]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z}\right) + 2\,\omega \cos\theta\, \rho\, v_\lambda = \frac{1}{a}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\,\frac{\partial \rho v_\lambda}{\partial z}\right) - 2\,\omega \cos\theta\, \rho\, v_\theta = \frac{1}{a\sin\theta}\,\frac{\partial p}{\partial \lambda}\,, \tag{2}$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}\,, \tag{3}$$

$$p = R\rho T\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta \sin\theta) + \frac{\partial}{\partial\lambda}(\rho v_\lambda)\right] + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0\,. \tag{5}$$

Здесь система координат — сферическая, причем z — высота над уровнем моря; θ — дополнение широты; λ — долгота места; a — радиус земного шара; v_θ, v_λ, v_z — составляющие скорости по осям θ, λ и z; ω — угловая скорость вращения Земли; p, T, ρ — давление, температура и плотность воздуха; R — газовая постоянная; g — ускорение силы тяжести, ν = кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Нашей целью является определение функции $p_0(\theta, \lambda, t)$.

Прежде всего проинтегрируем уравнение неразрывности (5) по z от 0 до ∞, получим

$$\cos\theta \int_0^\infty \rho v_\theta\, dz + \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^\infty \rho v_\theta\, dz + \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_0^\infty \rho v_\lambda\, dz = 0. \tag{6}$$

Интеграл от последнего члена левой части (5) обращается в нуль в силу того, что при $z = 0$ $v_z = 0$, а при $z \to \infty$ $\rho v_z = 0$.

Соотношение (6) является исходным для определения искомой функции, остается лишь вычислить v_θ и v_λ, для чего воспользуемся системой (5) (принимаем $\nu = \text{const.}$).

$$\frac{\partial^2 \rho v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2\,\omega\cos\theta}{\nu}\rho v_\lambda = \frac{2\omega\cos\theta}{\nu a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 \rho v_\lambda}{\partial z^2} - \frac{2\,\omega\cos\theta}{\nu}\rho v_\theta = \frac{2\,\omega\cos\theta}{\nu a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \tag{7}$$

где $\psi\ (\theta, \lambda, z, t)$ — функция тока, введенная по приближенному уравнению неразрывности вне планетарного пограничного слоя, причем $\rho v_\theta = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$, $\rho v_\lambda = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$. В отличие от системы (5) правые части (7) зависят также от высоты

Система уравнений (7) при граничных условиях

1) $\rho(v_\theta + iv_\lambda) = 0$ при $z = 0$ и 2) $\rho(v_\theta + iv_\lambda) < \infty$ при $z \to \infty$ имеет следующее решение:

$$\rho(v_\theta + iv_\lambda) = \frac{k_1}{2}e^{-k_1 z}\left\{\int_0^z e^{k_1 z} E dz - \int_0^\infty e^{-k_1 z} E dz\right\} -$$

$$- \frac{k_1}{2}e^{k_1 z}\int_\infty^z e^{-k_1 z} E dz. \tag{8}$$

Здесь

$$k_1^2 = \frac{2\,i\,\omega\cos\theta}{\nu}, \quad k^2 = \frac{\omega\cos\theta}{\nu}, \; E = \frac{i}{a}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right). \tag{9}$$

Перепишим теперь систему (7) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \rho v_\theta}{\partial z^2} + 2\,k^2 \rho v_\lambda = 2\,k^2 E_2,$$

$$\frac{\partial^2 \rho v_\lambda}{\partial z^2} - 2\,k^2 \rho v_\theta = -2\,k^2 E_1, \tag{10}$$

где

$$E = E_1 + iE_2, \quad E_1 = -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \; E_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{11}$$

Проинтегрируем систему (10) по z от 0 до ∞, получим

$$\int_0^\infty \rho v_\theta \, dz = \int_0^\infty E_1 \, dz + \frac{1}{2k^2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\lambda) \Big|_0^\infty,$$

$$\int_0^\infty \rho v_\lambda \, dz = \int_0^\infty E_2 \, dz - \frac{1}{2k^2} \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\theta) \Big|_0^\infty. \tag{12}$$

Воспользовавшись решением (8), легко вычислить

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\theta) \Big|_0^\infty = 2k^2 \int_0^\infty (E_2 \cos kz - E_1 \sin kz) e^{-kz} \, dz.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho v_\lambda) \Big|_0^\infty = -2k^2 \int_0^\infty (E_1 \cos kz + E_2 \sin kz) \, e^{-kz} \, dz. \tag{13}$$

Подставляя (12) в наше основное соотношение (6), воспользуясь (13), (11) и учитывая, что k по (9) зависит от θ, получим следующее уравнение для определения ψ

$$\int_0^\infty \Delta\psi e^{-kz} \sin kz \, dz - \frac{\sin^2\theta}{2\sqrt{\cos\theta}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \int_0^\infty \frac{\partial\psi}{\partial\theta} (\cos kz - \sin kz) \, z e^{-kz} \, dz -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\cos\theta}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \int_0^\infty \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} (\cos kz + \sin kz) \, z e^{-kz} \, dz = 0, \tag{14}$$

где

$$\Delta = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} \right] \text{ — оператор Лапласа.} \tag{15}$$

Желая вычислить интегралы, входящие в (14), мы должны привлечь барометрическую формулу. Согласно (3) имеем

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{g}{k} \int_0^z \frac{dz}{T} \right]. \tag{16}$$

Линеаризируем эту формулу [см. напр. ([6])]

$$p = \tilde{p} \left[\frac{p_0}{\tilde{p}_0} + \frac{g}{k} \int_0^z \frac{T' \, dz}{\tilde{T}^2} \right]. \tag{17}$$

Здесь $\tilde{p}$ и $\tilde{p}_0$ стандартные давления на высоте и на уровне моря. $\tilde{T}$ — стандартная температура на высоте z, T' — отклонения температуры; температура в нашей задаче считается известной.

Но вне планетарного пограничного слоя имеет место приближенное равенство $p \approx 2\omega \cos\theta\, \psi$, тогда из (17)

$$\psi = \frac{\tilde{p}}{2\omega}\left[\varphi + \frac{g}{R}\int_0^z \tau\, dz\right]. \tag{18}$$

где

$$\varphi(\theta, \lambda) = \frac{p_0(\theta, \lambda)}{\cos\theta\, \tilde{p}_0}, \qquad \tau(\theta, \lambda, z) = \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\cos\theta \left[\tilde{T}(z)\right]^2}, \tag{19}$$

причем как φ и τ, так и $\psi(\theta, \lambda)$ параметрически могут зависеть еще и от времени.

Подставляя (18) в (14), получим:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}\,\frac{\int\limits_0^\infty \tilde{p}\,(\cos kz - \sin kz)\, z e^{-kz}\, dz}{\int\limits_0^\infty \tilde{p} e^{-kz}\sin kz\, dz} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\sqrt{\frac{\omega}{\nu\cos\theta}}\,\frac{\int\limits_0^\infty \tilde{p}\,(\cos kz + \sin kz)\, z e^{-kz}\, dz}{\int\limits_0^\infty \tilde{p} e^{-kz}\sin kz\, dz} = F_1(\theta, \lambda), \tag{20}$$

где

$$F_1(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R\int\limits_0^\infty \tilde{p} e^{-kz}\sin kz\, dz}\int\limits_0^\infty \tilde{p} e^{-kz}\left\{\sin kz \int\limits_0^z \Delta\tau\, dz - \right.$$

$$-\frac{z\sin^2\theta}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\nu\cos\theta}}\left[(\cos kz - \sin kz)\int\limits_0^z \frac{\partial\tau}{\partial\theta}\, dz + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sin\theta}(\cos kz + \sin kz)\int\limits_0^z \frac{\partial\tau}{\partial\lambda}\, dz\right]\right\} dz. \tag{21}$$

Пользуясь, в левой части этого равенства, теоремой о среднем, обозначая через $\dot{p}$ — стандартное давление на среднем уровне (4—5 *км*), легко вычислить входящие сюда интегралы. Подставляя значение k по (9) и обозначая

$$F_1(\theta, \lambda)\cos\theta = F(\theta, \lambda), \tag{22}$$

получим следующее уравнение задачи:

$$\cos\theta\,\Delta\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = F(\theta, \lambda). \tag{23}$$

Из этого уравнения определяется $\varphi(\theta, \lambda)$, а по (19) — $p_0(\theta, \lambda)$.

Ищем решение (23) в виде ряда по шаровым функциям.

Пусть нам известно разложение

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (F_n^m \cos m\lambda + F_n'^m \sin m\lambda)\, P_n^m(\cos\theta). \tag{24}$$

Здесь F_n^m и $F_n'^m$ известные постоянные, $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра.

Представим решение для φ в таком же виде

$$\varphi(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos\theta), \tag{25}$$

тогда для коэффициентов φ_n^m и $\varphi_n'^m$ получим следующие выражения:

$$C_n^m = \frac{2n+1}{(n+1)(2n-1)(n-m)} \Big[im\, C_{n-1}^m - (n-2)(n-m-1)\, C_{n-2}^m - B_{n-1}^m \Big]. \tag{26}$$

где
$$C_n^m = \varphi_n^m + i\varphi_n'^m \quad \text{и} \quad B_n^m = 2(F_n^m + iF_n'^m). \tag{27}$$

Кроме того, мы воспользовались некоторыми соотношениями из [7] для расщепления полиномов Лежандра.

Из соотношений (26) последовательно определяются все C_n^m, а по (27) все φ_n^m и $\varphi_n'^m$, причем, как видно из этих выражений, все $C_n^m = 0$ при $n = m$.

Выпишем некоторые из них

$C_1^1 = 0$

$C_2^1 = -\frac{5}{3 \cdot 3 \cdot 3} B_1^1, \; C_2^2 = 0$

$C_3^1 = \frac{7}{4 \cdot 4 \cdot 5}\left(iC_2^1 - B_2^1\right), \; C_3^2 = -\frac{7}{4 \cdot 5 \cdot 5} B_2^2, \; C_3^3 = 0$ и т. д.

Выводы. 1. Имея разложение (24), т. е. все F_n^m и $F_n'^m$, можно подсчитать все φ_n^m и $\varphi_n'^m$, по (25) — $\varphi(\theta, \lambda)$, а по (19) — найти искомую функцию $P_0(\theta, \lambda)$.

2. Таким образом, путем некоторых упрощающих предположений найдено распределение атмосферного давления по поверхности Земли в случае незональной циркуляции атмосферы; решение построено в виде рядов по шаровым функциям, причем функция $F(\theta, \lambda)$ берется из наблюдений.

3. Мы здесь привели решение задачи для случая, когда ν постоянная. Легко убедиться, что задача может быть решена и для случаев, когда ν — линейная функция высоты во всей толще атмосферы или — линейная функция до некоторой высоты, а затем постоянная. Для этого следует воспользоваться системой (1)—(2), причем расчетные зависимости получаются несколько сложнее.

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Մթնոլորտի ոչ զոնալ ցիրկուլյացիայի դեպքում երկրի մակերևույթի վրա մթնոլորտային ճնշման բաշխման հարցի մասին

Ա. Ա. Դորոդնիցինը (1) օգտվելով Ն. Ե. Կոչինի (2) հավասարումներից լուծել է մթնոլորտի զոնալ ցիրկուլյացիայի դեպքում երկրի մակերևույթի վրա մթնոլորտային ճնշման բաշխման խնդիրը՝ ընդունելով կինեմատիկ տուրբուլենտ մածուցիկության գործակիցը որպես հաստատուն։

Օ. Ս. Բեռլյանդը (3) լուծել է նույն խնդիրը, միայն վերոհիշյալ գործակիցն ընդունել է գծային ֆունկցիա բարձրությունից։

Տվյալ աշխատանքում բերվում է երկրի մակերևույթի վրա մթնոլորտային ճնշման բաշխման խնդրի լուծումը, մթնոլորտի ոչ զոնալ ցիրկուլյացիայի դեպքում, ընդ որում կինեմատիկ տուրբուլենտ մածուցիկության գործակիցը ընդունված է հաստատուն։

Օդի ջերմաստիճանի բաշխումը, ինչպես և նախորդ խնդիրներում, ընդունված է որպես հայտնի ֆունկցիա։

Նախ անխզելիության (5) հավասարումը ինտեգրված է ըստ Z-ի 0-ից մինչև ∞ և ստացված է (6) հիմնական արտահայտությունը, որի մեջ մտնող արագության բաղադրիչները որոշվում են (1) և (2) հավասարումների սիստեմից, նախապես բերելով նրանց (7) տեսքին։ Սիստեմի լուծումը ստացվում է (8) տեսքով։ Տեղադրելով լուծման արդյունքները նույն սիստեմից ստացված (12) արտահայտությունների մեջ, ստացված է (13)-ը, որի տեղադրումը հիմնական (6) արտահայտության մեջ բերում է (14) հավասարմանը։ Գծայնացնելով բարոմետրական (16) բանաձևը, խնդիրը բերվում է (23) հավասարման լուծմանը։ Լուծումը փնտրվում է (25) տեսքով, ընդ որում շարքի գործակիցների համար ստացվում են (26) արտահայտությունները։ Աշխատանքում բերվում են նշված գործակիցներից մի քանիսի արժեքները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Дородницын*, Труды ГГО, в. 18, 1937. [2] *Н. Е. Кочин*, Труды ГГО, в. 4, 1935. [3] *О. С. Берлянд*, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 3, 1950. [4] *Е. Н. Блинова*. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1, 1947. [5] *А. М. Мхитарян*. Изв. АН СССР. сер. геоф., № 1, 1955. [6] *Е. Н. Блинова*. ДАН СССР, т. XCII, № 3, 1953. [7] *Е. Янке* и *Ф. Эмде*, Таблицы функций, 1948.