ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXI 1955 2

МАТЕМАТИКА

В. А. Оганесян

Инвариантные и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок*

(Представлено А. Л. Шагиняном 12. II. 1955)

I. Инвариантные подсистемы. Статья относится к теории ассоциативных систем, которая в настоящее время активно разрабатывается В. В. Вагнером, Е. С. Ляпиным и другими.

Здесь изучается симметрическая система частичных подстановок, а именно: даются определения инвариантных и нормальных подсистем и доказываются некоторые теоремы, которые позволяют перечислить как все инвариантные, так и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок.

До перехода к основной задаче предварительно познакомимся с некоторыми понятиями и терминами, которыми будем пользоваться в данной статье.

Дано конечное множество $M = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Взаимно однозначное отображение подмножества u множества M на подмножество v, того же множества, называется *частичной подстановкой* в множестве M, что можно написать в виде $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$.

Число элементов в подмножестве u называется длиной, как для подмножества u, так и для частичной подстановки $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Частичная подстановка t называется произведением x на y и обозначается через xy, если частичная подстановка t отображает все те и только те элементы α, для которых

$$t(\alpha) = y[x(\alpha)].$$

Для частичной подстановки x, частичная подстановка x' называется *обратной*, если xx' есть тождественная подстановка и x, x', xx' имеют одинаковую длину.

Частичная подстановка, отображающая пустое подмножество, называется *пустой подстановкой* и обозначается через O.

* Статья представляет собой часть кандидатской диссертации, защищенной автором в МГУ 25. XII. 1953 г.

Частичная подстановка x длины k содержится, как часть, в частичной подстановке y длины m, если произведение xy^{-1} является единичной подстановкой длины k.

Множество частичных подстановок называется *системой частичных подстановок*, если оно замкнуто относительно умножения частичных подстановок и с каждой частичной подстановкой x содержит ей обратную.

Множество R_k частичных подстановок длины k называется *слоем*, если,

1) с каждой частичной подстановкой x в R_k содержится частичная подстановка x^{-1};

2) если произведение двух подстановок из R_k имеет длину k, то оно содержится в R_k.

Число k называется *номером* слоя R_k.

Слой K_k называется *цепью*, если для любых двух частичных подстановок $x, y \in R_k$ в R_k существует такая частичная подстановка z, что $xzy \in R_k$.

Впрочем легко видеть, что всякий слой состоит из одной или нескольких непересекающихся цепей, кроме этого, цепь является группоидом Брандта.

Легко доказать, что в цепи некоторого слоя с номером k существует одна или несколько групп подстановок степени k. Любая из максимальных групп этой цепи называется группой цепи, все группы цепи данной цепи изоморфны друг другу.

Совокупность всех частичных подстановок в множестве $M = \{1, 2 \cdots n\}$, является, очевидно *системой частичных подстановок*, ([1]), она называется *симметрической системой* и обозначается через Σ_n.

Из определения системы частичных подстановок следует, что система состоит из одного или нескольких слоев.

В дальнейшем слово *частичная* будем опускать и под словом *подстановка* будем понимать, как обычные, так и необычные подстановки; кроме этого, в дальнейшем под словом *связь* мы будем понимать необычные подстановки.

В теории групп нормальные делители или инвариантные подгруппы играют весьма важную роль, поэтому естественно и в теорию систем частичных подстановок ввести аналогичное понятие. Мы в этой статье дадим определение инвариантной подсистемы и докажем несколько теорем, которые позволяют нам перечислить все инвариантные подсистемы симметрической системы, а также определим нормальные подсистемы и перечислим все нормальные подсистемы симметрической системы.

Если B есть система подстановок в множестве M, то n-ый слой этой системы, если он не пустой, представляет собой обычную группу подстановок степени n.

Если S подстановка из n-ого слоя системы B, то, как это следует из определения системы, $S^{-1}BS \subset B$ и, так как для двух различных подстановок $x \in B$, $y \in B$ из

$$S^{-1}xS = S^{-1}yS$$

следовало бы: $x = y$, то $S^{-1}BS = B$.

Если S подстановка из k-ого слоя, где $k < n$, то, хотя $S^{-1}BS \subset B$, но в этом случае $S^{-1}BS \neq B$.

Исходя из этих соображений введем понятие внутреннего автоморфизма системы подстановок.

Из $S^{-1}BS = B$ следует, что соответствие $S^{-1}xS \leftrightarrow x$ является автоморфизмом. Этот автоморфизм порожден подстановкой S, где S принадлежит n-му слою системы B и называется внутренним автоморфизмом системы B.

Подмножество подстановок из системы B называется *подсистемой* системы B, если это подмножество само является системой.

Определение: подсистема $J \in B$ называется *инвариантной подсистемой*, если она при всяком внутреннем автоморфизме отображается на себя.

Теорема 1. Если k-ый слой инвариантной подсистемы системы Σ_n содержит группу цепи $G(u)$ на подмножестве $u \in M$, то в этом же слое инвариантной подсистемы на всяком подмножестве $v \in M$ длины k существует группа $G(v)$, причем $G(u)$ сопряжена с $G(v)$.

Доказательство. Так как n-ый слой симметрической системы Σ_n содержит все возможные подстановки длины n, а эти подстановки обычные, то n-ый слой представляет из себя симметрическую группу степени n. Эта группа n-раз транзитивна, стало быть транзитивна и k раз, где $k < n$. Из этого следует, что в n-ом слое системы существуют подстановки, переводящие подмножество $u \in M$ длины k во всякое подмножество $v \in M$ длины k. Поэтому, трансформируя группу $G(u)$ с помощью любой из упомянутых подстановок n-го слоя системы Σ_n, мы получим группу $G(v)$.

Теорема 2. Группа цепи k-го слоя инвариантной подсистемы системы Σ_n является нормальным делителем симметрической группы степени k.

Доказательство. В самом деле, если $G(u)$ является группой цепи k-го слоя инвариантной подсистемы системы Σ_n, то, исходя из u, можно из симметрической группы степени n так выбрать $k!$ различных подстановок, чтобы они на k элементах подмножества $u \in M$ действовали как симметрическая группа степени k. Например, таким выбором множества подстановок является множество различных подстановок n-го слоя, которые оставляют неподвижными элементы множества M, не входящие в подмножество u.

Если группу $G(u)$ трансформировать с помощью так выбранных подстановок, то, так как эти подстановки переводят u на u, а $G(u)$ является группой цепи, мы получим опять $G(u)$. Последнее возможно однако лишь тогда, когда $G(v)$ является нормальным делителем симметрической группы степени k.

Теорема 3. Если группа цепи k-го слоя инвариантной подсистемы системы Σ_n состоит лишь из четных подстановок, то при $1 < k < n-1$ этот слой не может содержать связей.

Доказательство: допустим, что в k-ом слое инвариантной подсистемы системы Σ_n существует связь

$$t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_k \\ \beta_1 & \beta_2 \cdots \beta_k \end{pmatrix};$$

обозначим пересечение u и v через w и пусть длина w равна l; так как t является связью, то $k - l \geqslant 1$. Рассмотрим отдельно случай: 1) $k - l = 1$. 2) $k - l \geqslant 2$.

1. Из $k - l = 1$ следует, что существуют такие элементы: $\alpha = \alpha_i \in u$, $\beta = \beta_j \in v$, что $\alpha \overline{\in} v$, $\beta \overline{\in} u$. Далее из $k < n - 1$ и $k - l = 1$ следует, что в M существует такой элемент δ, который не входит ни в u, ни в v.

Кроме того, из $k > 1$ и $k - l = 1$ следует, что $l \geqslant 1$, т. е. пересечение w не пустое. В таком случае, взяв подстановку $S = (\alpha\alpha'\beta\delta)$ из n-го слоя системы Σ_n, где $\alpha' \in w$, и трансформируя связь t с помощью S, получим в инвариантной подсистеме подстановку $t_1 = S^{-1} t S = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, но так как $u = w + \alpha$, $v = w + \beta$, то

$$u_2 = u - \alpha + \beta = w + \alpha - \alpha + \beta = w + \beta = v$$
$$v_2 = v - \alpha' + \delta.$$

Тогда

$$t_2 = t \cdot t_1 = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v_2 \end{pmatrix}$$

является связью в этом же слое инвариантной подсистемы.

Так как v_2 получается от v заменой элемента $\alpha' \in w$ через δ, а последний не входит в подмножество u, то пересечение u и v_2 содержит $l - 1$ элементов.

Таким образом, в k-ом слое инвариантной подсистемы Σ_n из существования связи $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, где пересечение содержит $l = k - 1$ элементов, следует существование связи $t_2 = \begin{pmatrix} u \\ v_2 \end{pmatrix}$, где пересечение u и v содержит уже $l = k - 2$ элементов. Этим доказательство сведено ко второму случаю.

2. Пусть $t = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ есть такая связь, что пересечение u и v содержит $l \geqslant k - 2$ элементов. Тогда существуют такие элементы $\alpha_1 \in u$, $\alpha_2 \in u$, что $\alpha_1 \overline{\in} v$, $\alpha_2 \overline{\in} v$. В этом случае, взяв подстановку $S = (\alpha_1\alpha_2)$ из n-го слоя системы Σ_n и трансформируя t с помощью S, мы получим:

$$t_1 = S^{-1}tS = \begin{pmatrix} \alpha_2\, \alpha_1\, \alpha_3\, \alpha_4 \cdots \alpha_k \\ \beta_1\, \beta_2\, \beta_3\, \beta_4 \cdots \beta_k \end{pmatrix}$$

однако

$$t_2 = t(t_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots \alpha_k \\ \alpha_2\, \alpha_1\, \alpha_3 \cdots \alpha_k \end{pmatrix},$$

а эта подстановка нечетная и принадлежит k-му слою инвариантной подсистемы Σ_n, что согласно условию теоремы невозможно, тем самым теорема доказана.

При $k = n - 1$ существует инвариантная подсистема, которая в своем $k = n - 1$ слое содержит связи, тогда как группа цепи k-го слоя содержит только четные подстановки

Теорема 4. Если группа цепи k-го слоя инвариантной подсистемы системы Σ_n есть единичная группа, то k-ый слой инвариантной подсистемы системы Σ_n не может содержать связей при $n > 4$, $k > 1$.

Доказательство: докажем теорему для случая $k = n - 1$, ибо для $k < n - 1$ теорема следует из теоремы 3.

В рассматриваемом случае связи могут быть только двух следующих типов:

$$\text{а)}\quad t = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots \alpha_{n-2}\, \xi \\ \alpha_1'\, \alpha_2'\, \alpha_3' \cdots \eta\, \alpha_{n-2}' \end{pmatrix}$$

и

$$\text{б)}\quad t = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \cdots \alpha_{n-2}\, \xi \\ \alpha_1'\, \alpha_2'\, \alpha_3' \cdots \alpha_{n-2}'\, \eta \end{pmatrix},$$

где $\eta \neq \xi$ а $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-2}$ и $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_{n-2}'$ совпадают с точностью до расположения элементов.

Длина подстановки t больше трех, так как $n > 4$.

Если связь t типа (а), то мы можем взять из n-го слоя системы Σ_n подстановку $S = (\alpha\, \alpha_{n-2})$, где элемент α является одним из элементов $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-3}$.

Трансформируя связь t с помощью подстановки S, мы получим подстановку $t_1 = S^{-1}tS$, нижняя и верхняя строки которой соответственно составлены из тех же элементов, из которых составлены нижняя и верхняя строки подстановки t. По этой причине подстановка $t_2 = tt_1^{-1}$ является обычной подстановкой, принадлежащей $n-1$-му слою. Но подстановка t_2 не единичная подстановка, так как она переводит элемент α_{n-2} в α, а это противоречит условию теоремы.

Если подстановка t типа (б) и она не тождественна на элементах $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-2}$, то, как следует из условия $n - 1 \geqslant 4$, подстановка t должна иметь такой вид

$$t = \begin{pmatrix} \cdots \alpha_r \cdots \alpha_i \cdots \alpha_j \cdots \xi \\ \cdots \alpha_r' \cdots \alpha_j \cdots \alpha_j' \cdots \eta \end{pmatrix}.$$

Выбирая из n-го слоя системы Σ_n подстановку $S = (\alpha_r \alpha_j)$ и трансформируя подстановку t с помощью S, получим

$$t_1 = S^{-1} t S = \begin{pmatrix} \dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots \alpha_r \dots \xi \\ \dots \alpha_i^{\cdot} \dots \alpha_r \dots \alpha_r^{\cdot} \dots \eta \end{pmatrix}.$$

Подстановка $t_2 = t_1^{-1} t$ является обычной подстановкой, принадлежащей $n-1$-му слою инварантной подсистемы системы Σ_n. Подстановка t_2 переводит элемент α_r в элемент α_j, т. е. не является единичной подстановкой, а это опять противоречиг условию теоремы.

Остается предположить, что подстановка t на элементах α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_{n-2}$ тождественна. В таком случае подстановка t имеет такой вид:

$$t = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\, \xi \\ \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\, \eta \end{pmatrix},$$

тогда, взяв из n-го слоя системы Σ_n подстановку $S = (\alpha_{n-2} \eta \xi)$ и трансформируя подстановку t с помощью S, мы получим подстановку

$$t_1 = S^{-1} t S = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \eta\, \alpha_{n-2} \\ \alpha_1\, \alpha_2 \dots \eta\, \xi \end{pmatrix}.$$

Произведение $tt_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_{n-2}\, \xi \\ \alpha_1\, \alpha_2 \dots \xi\, \eta \end{pmatrix}$ есть подстановка типа (а), которая, согласно доказанному выше, не может принадлежать инвариантной подсистеме, что и требовалось доказать.

При $n = 4$ существует инвариантная подсистема симметрической системы степени 4, группой цепи которой служит единичная группа $e_3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 1\,2\,3 \end{pmatrix}$ и третий слой которой содержит связи; это же верно для $n = 2, 3$.

В дальнейшем будет полезно следующее определение:

Определение. Слой называется ***полным***, если он содержит всевозможные подстановки длины k.

Теорема 5. Если группа цепи k-го слоя инвариантной подсистемы системы Σ_n при $1 < k < n$ содержит знакопеременную группу, то $k-1$-й слой полный.

Действительно, если в k-ом слое содержится знакопеременная группа, то, согласно теореме *1*, этот слой содержит всякие знакопеременные группы, подстановки которых имеют длину k, и поэтому этот слой содержит все единицы длины k. Отсюда следует, что $k-1$-ый слой содержит все единицы длины $k-1$, следовательно $k-1$-ый слой содержит части длины $k-1$ всех подстановок k-го слоя. Поэтому при $k > 2$, $k-1$-ый слой содержит связи. Согласно теореме *3* это возможно лишь тогда, когда $k-1$-ый слой содержал и нечетные подстановки, а по теореме *2* группа цепи $k-1$ слоя должна быть симметрической.

Так как k-ый слой инвариантной подсистемы содержит всякие знакопеременные группы и каждая знакопеременная группа транзитивна, то в k-ом слое инвариантной подсистемы существует обычная подстановка длины k, переводящая подмножество $u \in M$ длины $k-1$ в подмножество $v \in M$ длины $k-1$, если только пересечение u и v имеет длину $k-2$.

Часть длины $k-1$ этой подстановки, которая переводит u на v, является связью в $k-1$-ом слое. Иными словами, между любыми двумя симметрическими группами $k-1$-го слоя, единицы которых имеют $k-2$ общих элементов, в $k-1$-ом слое существует связь.

Пусть $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(m)}$ некоторые симметрические группы из $k-1$-го слоя расположены так, что единицы любых двух соседних симметрических групп имеют $k-2$ общих элементов и пусть подстановка t_i является связью между $S^{(i)}$ и $S^{(i+1)}$, где $i=1, 2, \ldots, m-1$. Тогда $t = t_1 t_2 \ldots t_{m-1}$ есть связь между симметрическими группами $S^{(1)} S^{(m)}$. Так как все симметрические группы $k-1$-го слоя можно расположить так, чтобы единицы любых двух соседних симметрических групп имели $k-2$ общих элементов, то между любыми двумя симметрическими группами S' и S'' $k-1$-го слоя существует связь t', поэтому существуют и все связи между этими двумя группами. Эти связи суть $S't'$ и $S''(t')^{-1}$.

Легко доказать следующие три теоремы.

Теорема 6. Если подстановка t длины $n-1$ является частью четной подстановки T знакопеременной группы A_n степени n, то A_n и t порождают систему $\{A_n, t\}$, для которой $n-1$-ый слой неполный.

Теорема 7. Если система содержит A_n и подстановку t длины $(n-1)$, не являющуюся частью ни одной из подстановок A_n, то при $n > 2$ ее $(n-1)$-ый слой полный.

Теорема 8. Если система содержит A_n и подстановку t длины $k < n-1$, то ее k-ый слой полный.

Теоремы *1—8* позволяют полностью перечислить все инвариантные подсистемы симметрической системы.

II. Нормальные подсистемы. Определение. Подсистема N системы R называется ***нормальной подсистемой***, если для всяких $x \in R$, $y \in R$, $S \in N$ подстановки xSy и xy одновременно принадлежат или не принадлежат подсистеме N.

Доказано, что нормальная подсистема является нормальным делителем, если система является группой; кроме этого, для группы понятие нормального делителя и инвариантной подсистемы совпадают. Для системы частичных подстановок это далеко не так, а именно: для симметрических систем верна следующая теорема.

Теорема 9. Симметрическая система Σ_n обладает четырьмя и только четырьмя нормальными подсистемами.

Доказательство: легко проверяется, что единичная подгруппа $E = e_n$, знакопеременная группа A_n степени n, симметрическая группа

S_n степени n и сама симметрическая система Σ_n степени n являются нормальными подсистемами симметрической системы.

Так как n-ый слой симметрической системы является симметрической группой S_n, то n-ый слой нормальной подсистемы должен быть нормальным делителем симметрической группы S_n. Допустим, что нормальная подсистема N отлична от нормальных делителей симметрической группы S_n, следовательно, согласно вышеизложенному, нормальная подсистема N содержит подстановку t длины $k < n$, тогда $e_k = tt^{-1} \in N$.

Если подстановка $S \in S_n$, то $S^{-1} e_k S = e_k' \in N$, так как $S^{-1}S = e \in N$. Если S пробегает все подстановки симметрической группы S_n, то e_k' пробегает все единицы длины k, поэтому в N содержится произведение всех этих единиц, т. е. пустая подстановка O.

Для всякого $x \in \Sigma_n$ подстановки

$$O = xOe \text{ и } x = xe$$

одновременно принадлежат или не принадлежат N, т. е. всякий $x \in \Sigma_n$ принадлежит N.

Этим теорема доказана.

Армянский государственный заочный
педагогический институт

Վ. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Մասնակի տեղադրությունների սիմետրիկ սիստեմի ինվարիանտ և նորմալ ենթասիստեմները

Հոդվածում սահմանվում են մասնակի տեղադրությունների (վերջավոր) սիմետրիկ սիստեմի ինվարիանտ և նորմալ ենթասիստեմները։ Այդ սահմանումը հանդիսանում է ինվարիանտ ենթախմբի և նորմալ ենթախմբի գաղափարի ընդհանրացումը մասնակի տեղադրությունների կիսախմբերի համար։

Այդ երկու հասկացողությունները խմբերի համար համընկնում են, իսկ այստեղ այդպես չէ։ Մասնակի տեղադրությունների սիմետրիկ սիստեմը ունի բազմաթիվ ինվարիանտ ենթասիստեմներ և ընդամենը՝ 4 նորմալ ենթասիստեմ։

Հոդվածում ապացուցված են մի շարք թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են տալիս մեկ առ մեկ նշելու սիմետրիկ սիստեմի բոլոր ինվարիանտ ենթասիստեմները, բացի այդ, ապացուցվում է թեորեմ, որ սիմետրիկ սիստեմն ունի միայն և միայն 4 նորմալ ենթասիստեմներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Вагнер.* ДАН СССР, 84, 6 (1953). [2] *Е. С. Ляпин.* Мат. сборн., т. 20 (1947). [3] Վ. Ա. Հովհաննիսյան. *Հ. Հ. Մ. Ի.-ի գիտական աշխատությունների ժողովածու,* № 1, 1955։