ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXI 1955 1

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Учет вертикального турбулентного перемешивания в распределении давления на уровне моря

(Представлено Н. Х. Арутюняном 12 XII 1954)

В работе [1] Е. Н. Блиновой дан рациональный способ определения осредненного за большой промежуток времени планетарного поля давления по заданному полю температуры. Уравнение Фридмана было спроектировано автором на вертикальную ось, упрощено за счет пренебрежения членами с вертикальной скоростью и применено для определения поля давления на среднем уровне.

В работе [2] Е. Н. Блинова дает решение той же задачи с учетом членов с вертикальной скоростью. В обеих работах атмосфера рассматривается бароклинной идеальной средой. Понятно, однако, что существующий в атмосфере планетарный пограничный слой, или слой трения, оказывает известное влияние на образование высотных и наземных барических полей и поэтому в настоящей статье мы поставили целью произвести учет этого влияния.

Систему координат примем сферическую; землю считаем шаром радиуса a.

Кроме того, считаем, что движение атмосферы состоит из основного зонального потока в виде:

$$\bar{v}_\lambda(\theta, z) = a\alpha(z)\sin\theta, \tag{1}$$

$$\bar{p}(\theta, z) = p_{00}(z) + a^2\omega\alpha(z)\rho(z)\sin^2\theta, \tag{2}$$

z — высота над поверхностью земли, θ — дополнение широты, λ долгота места, ω и α угловые скорости вращения Земли и основного зонального потока. Через p, ρ, T обозначаются давление, плотность и температура воздуха, v_θ, v_λ, v_z — составляющие скорости по осям координат, $p_{00}(z)$ — давление на полюсе и возмущений зональной циркуляции, причем элементы возмущений считаются малыми. Температура представляется в виде:

$$T = T_0(z) + M(z)\sin^2\theta + T'(\theta, \lambda, z). \tag{3}$$

$T_0(z)$ — температура на полюсе, $M(z)$ — перепад температуры от экватора к полюсу. Рассматриваем стационарное решение.

Уравнение неразрывности позволяет приближенно вводить во всех уровнях (кроме, конечно, пограничного слоя) функцию тока $\Psi(\theta, \lambda, z)$. Представляя последнюю в виде:

$$\Psi(\theta, \lambda, z) = \bar{\psi}(\theta, z) + \psi(\theta, \lambda, z), \tag{4}$$

легко убедиться, что незональные отклонения составляющих скорости связаны с ψ формулами:

$$v_\theta(\theta, \lambda, z) = -\frac{1}{a \sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, \quad v_\lambda(\theta, \lambda, z) = \frac{1}{a}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}. \tag{5}$$

Проектируя уравнение Фридмана (с учетом сил Кориолиса и турбулентного трения по вертикали) на вертикальную ось, получим:

$$\alpha\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\lambda} + 2\omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{2a^2\omega\cos\theta}{\rho}\frac{\partial\rho v_z}{\partial z} = \frac{2a^2\alpha\omega\cos\theta}{\tilde{T}}\frac{\partial T'}{\partial\lambda} + \nu a^2\frac{\partial^2\Omega_z}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Здесь
$$\Omega_z = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\lambda \sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\lambda}\right], \tag{7}$$

$\tilde{T}(z)$ — стандартная температура, ν — кинематический коэффициент вертикального турбулентного перемешивания, принятый постоянным.

$$\Delta\psi = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right]. \tag{8}$$

Помножим обе части равенства (6) на ρ и проинтегрируем по z от 0 до ∞, получим:

$$\int_0^\infty\left[\alpha\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\lambda} + 2\omega\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right]\rho dz = 2a^2\omega\int_0^\infty\frac{\partial\tau_1}{\partial\lambda}\alpha\tilde{T}\rho dz + \nu\rho_{cp}a^2\left(\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}\right)\Bigg|_0^\infty. \tag{9}$$

Интеграл от последнего члена слева обращается в нуль, так как $v_z = 0$ при $z = 0$ и $\rho v_z = 0$ при $z \to \infty$

$$\tau_1 = \frac{T'(\theta, \lambda, z)\cdot\cos\theta}{\left|\tilde{T}(z)\right|^2}. \tag{10}$$

Чтобы выполнить квадратуры в левой части (9), напишем барометрическую формулу:

$$P(\theta, \lambda, z) = P_0(\theta, \lambda)\exp\left[-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T(\theta, \lambda, z)}\right]$$

и линеаризируем ее:

$$\frac{p}{\tilde{P}} = \frac{p_0}{\tilde{P}_0} + \frac{g}{R}\int_0^z\frac{T'(\theta, \lambda, z)\,dz}{\left|\tilde{T}(z)\right|^2}. \tag{11}$$

Здесь $\tilde{p}$ и $\tilde{p}_0$ стандартные давления на высоте и на уровне моря, R — газовая постоянная.

Уравнение движения по оси λ, написанное для свободной атмосферы, позволяет установить следующее приближенное соотношение:

$$p \simeq 2\omega\rho\cos\theta\psi. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и пользуясь уравнением состояния, получим:

$$\psi = \frac{R\tilde{T}}{2\omega}\left[\varphi + \frac{g}{R}\int_0^z \tau_2\, dz\right], \tag{13}$$

где

$$\varphi(\theta, \lambda) = \frac{p_0(\theta, \lambda)}{\tilde{P}_0 \cos\theta}, \quad \tau_2 = \frac{T'(\theta, \lambda, z)}{\cos\theta\left|\tilde{T}(z)\right|^2}. \tag{14}$$

Подстановка (13) в (9) дает:

$$\alpha_1 \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial\lambda} + 2\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{2\omega\nu a^2 \rho_{cp}}{R\int_0^\infty \tilde{T}\rho dz}\left(\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}\right)\Bigg|_0^\infty + F(\theta, \lambda), \tag{15}$$

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^\infty \alpha\tilde{T}\, dz}{\int_0^\infty \tilde{T}\rho dz}; \quad F(\theta, \lambda) = \frac{-g}{R\int_0^\infty \tilde{T}\rho dz}\cdot\int_0^\infty\Bigg|\alpha\int_0^z \frac{\partial\Delta\tau_2}{\partial\lambda} dz +$$

$$+ 2\omega\int_0^z \frac{\partial\tau_2}{\partial\lambda} dz - \frac{4a^2\omega^2\alpha}{g}\frac{\partial\tau_1}{\partial\lambda}\Bigg|\tilde{T}\rho dz. \tag{16}$$

Из уравнения (15) определяется $\varphi(\theta, \lambda)$, а из (14) $p_0(\theta, \lambda)$; остается лишь вычислить первый член справа.

Чтобы вычислить член, учитывающий вертикальное перемешивание, заметим, что на большом расстоянии от Земли влияние турбулентной вязкости исчезает, т. е. $\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}\Big|_{z\to\infty} = 0$. Остается вычислить $\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}\Big|_{z=0}$.

Для вычисления последнего необходимо иметь составляющие скорости в приземном слое, для определения которых воспользуемся уравнениями Кочина [3]. В нашем случае имеем:

$$\rho\nu\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + 2\omega\rho\cos\theta v_\lambda = \frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial\theta},$$

$$\rho\nu\frac{\partial^2 v_\lambda}{dz^2} - 2\omega\rho\cos\theta\cdot v_\theta = \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}. \tag{17}$$

Так как нас интересуют скорости в непосредственной близости от Земли, то мы в этом тонком слое можем считать градиент давления не зависящим от высоты. Кроме того, между полем давления и полем функции тока существует приближенное соотношение (12) вне этого слоя. Тогда, обозначая через ψ_0 значение ψ на верхней границе слоя трения, мы можем считать, что:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial p}{\partial \theta} \approx \frac{2\omega\rho\cos\theta}{a}\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda} \approx \frac{2\omega\rho\cos\theta}{a\sin\theta}\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda},$$

и наша система (17) будет с правой частью, не зависящей от z. Тогда, при граничных условиях—прилипание на земле и ограниченность скорости на бесконечности, получим:

$$\begin{aligned} v_\theta &= -\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda}\left[1 - e^{-kz}\cos kz\right] - \frac{1}{a}\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} e^{-kz}\sin kz, \\ v_\lambda &= \frac{1}{a}\frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}\left[1 - e^{-kz}\cos kz\right] - \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial \psi_0}{\partial \lambda} e^{-kz}\sin kz, \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\omega\cos\theta}{\nu}}. \tag{19}$$

Вставляя (18) в (7), получим:

$$\left.\frac{\partial \Omega_z}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\omega\cos\theta}{\nu}}\,\Delta\psi_0, \tag{20}$$

или, воспользуясь (12) и (14), получим:

$$\left.\frac{\partial \Omega_z}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{\omega\cos\theta}{\nu}}\,\frac{\tilde{P}_0}{2\omega\rho_0}\,\Delta\varphi. \tag{21}$$

Подстановка (21) в (15) приводит к окончательному уравнению нашей задачи:

$$\alpha_1\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \lambda} + 2\omega\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + c\,\Delta\varphi = F(\theta, \lambda). \tag{22}$$

Здесь

$$c = \frac{\tilde{T}_0\rho_{cp}}{\int\limits_0^\infty \tilde{T}\rho\,dz}\sqrt{\omega\nu\cos\theta}. \tag{23}$$

Полученное уравнение линейное относительно неизвестной функции $\varphi(\theta, \lambda)$ (правая часть известная функция своих аргументов, так как во всей задаче мы считаем температуру известной), один из коэффициентов переменный. Желая получить простые количественные оценки, мы в дальнейшем будем, ради простоты, считать, что $\sqrt{\nu\cos\theta} \approx \approx \mathrm{const}$. Ясно тогда, что и $c = \mathrm{const}$. Последний член слева в (22) учитывает тот суммарный эффект, который оказывает планетарный пограничный слой (вертикальный турбулентный обмен воздушных масс) на образование наземных барических полей.

Решение уравнения (22) мы будем искать в виде ряда по шаровым функциям.

Пусть нам известно разложение:

$$F(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(F_n^m \cos m\lambda + F_n'^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta). \tag{24}$$

$F_n^m, F_n'^m$ — известные постоянные, $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра. Ищем решение для φ в таком же виде:

$$\varphi(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} \left(\varphi_n^m \cos m\lambda + \varphi_n'^m \sin m\lambda\right) P_n^m(\cos\theta), \tag{25}$$

тогда:

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= \frac{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]\, F_n'^m - cn(n+1)\, F_n^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [cn(n+1)]^2}, \\ \varphi_n'^m &= \frac{-m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]\, F_n^m - cn(n+1)\, F_n'^m}{m^2[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]^2 + [cn(n+1)]^2}. \end{aligned} \tag{26}$$

В случае отсутствия трения $\nu = 0$ $(c = 0)$ получим:

$$\begin{aligned} \varphi_n^m &= \frac{F_n'^m}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]}, \\ \varphi_n'^m &= -\frac{F_n^m}{m[\alpha_1 n(n+1) - 2\omega]}. \end{aligned} \tag{27}$$

Эти выражения получены Е. Н. Блиновой [2].

Знаменатели в последних выражениях при известных значениях чисел m и n могут обращаться в нуль, это означает, что при некоторых длинах волн решение (27) перестает существовать. В случае же, когда учитывается трение $(c \neq 0)$, как показывает (26), явления резонанса не будет. Наоборот, за счет трения происходит диссипация энергии, следовательно возмущения затухают.

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

Ուղղաձիգ տուրբուլենտ շփման ազդեցությունը ծովի մակարդակին մթնոլորտի ճնշման բաշխման վրա

Հենվելով [2] աշխատանքի վրա, որում բերվում է ծովի մակարդակի վրա ճնշման բաշխման խնդրի լուծումը իդեալական բարոկլինային մթնոլորտի համար, մենք այս աշխատանքում հաշվի ենք առնում պլանետար սահմանային շերտի ազդեցությունը ճնշման բաշխման վրա։ Ընդունելով, որ շարժումը կազմված է հիմնական զոնալ ցիրկուլյացիայից և նրա գրգռումներից, մենք ելնում ենք Ֆրիդմանի հավասարումից (6) տեսքով, որտեղ մթնոլորտն արդեն դիտվում է իբրև իրական միջավայր հաստատուն տուրբուլենտ մածուցիկության գործակցով։ Ինտեգրելով նշված հավասարումն ըստ բարձրության 0-ից մինչև ∞ և օգտվելով գծայնացրած բարոմետրական (11) բանաձևից ու (13) ձևափոխումից, մենք ստանում ենք (15) հավասարումը։ (15)-ի աջ մասի առաջին անդամը հաշվելու համար օգտվում ենք Կոչինի (17) հավասարումների սիստեմի (18) լուծումից։ Տեղադրելով այդ լուծումը (7)-ի մեջ, հնարավորություն ենք ստանում հաշվել մեզ հետաքրքրող անդամը (21) տեսքով։ Վերջին հավասարման աջ մասը մեզ հայտնի է, քանի որ մենք փնտրում ենք ճնշման դաշտը տված ջերմաստիճանային դաշտի դեպքում։ Լուծումը փնտրում ենք (25) տեսքով, այդ դեպքում շարքի գործակիցների համար ստանում ենք (26) արտահայտությունները։ Շփման բացակայության դեպքում ստացվում են (27) արտահայտությունները, որոնք ճշտությամբ համընկնում են (2) աշխատանքում ստացված արդյունքներին։ (27) արտահայտությունների հայտարարները որոշ ալիքային թվերի դեպքում կարող են զրո դառնալ, այդ ռեզոնանսի վտանգը վերացվում է շփման առկայության դեպքում, դա պարզ երևում է ստացած (26) արտահայտություններից։

Վերջին դեպքում գրգռումները մարում են։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Е. Н. Блинова*, ДАН СССР, 39, № 7 (1943). [2] *Е. Н. Блинова*, ДАН СССР, 92, № 3 (1953). [3] *Н. Е. Кочин*, Труды ГГО, 4, 1935.