ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXI 1955 1

МЕХАНИКА

Н. Х. Арутюнян, действ. чл. АН Армянской ССР, и К. С. Чобанян

О кручении призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести

(Представлено 15 IV 1955)

В настоящей работе рассматривается задача о кручении призматического стержня с произвольным поперечным сечением, составленного из двух отдельных призматических тел, спаянных по боковым поверхностям, причем материал одного из них обладает свойством ползучести, а материал другого является упругим.

Пусть D — поперечное сечение стержня состоит из двух областей D_1 и D_2 ($D = D_1 + D_2$). Положим далее, что в области D_1 материал обладает свойством ползучести, а в области D_2 материал упругий.

Поместим начало координат в середине сечения рассматриваемого стержня, направив ось oz параллельно его образующим. Будем рассматривать напряженное состояние и деформацию данного стержня при воздействии двух закручивающих моментов $M_{\text{кр}}$, приложенных на его торцах $z = \pm l$ и направленных по оси стержня oz (рис. 1). Заметим, что приведенный здесь метод решения без особых затруднений может быть распространен и на случай, когда число областей, составляющих поперечное сечение данного стержня, больше двух.

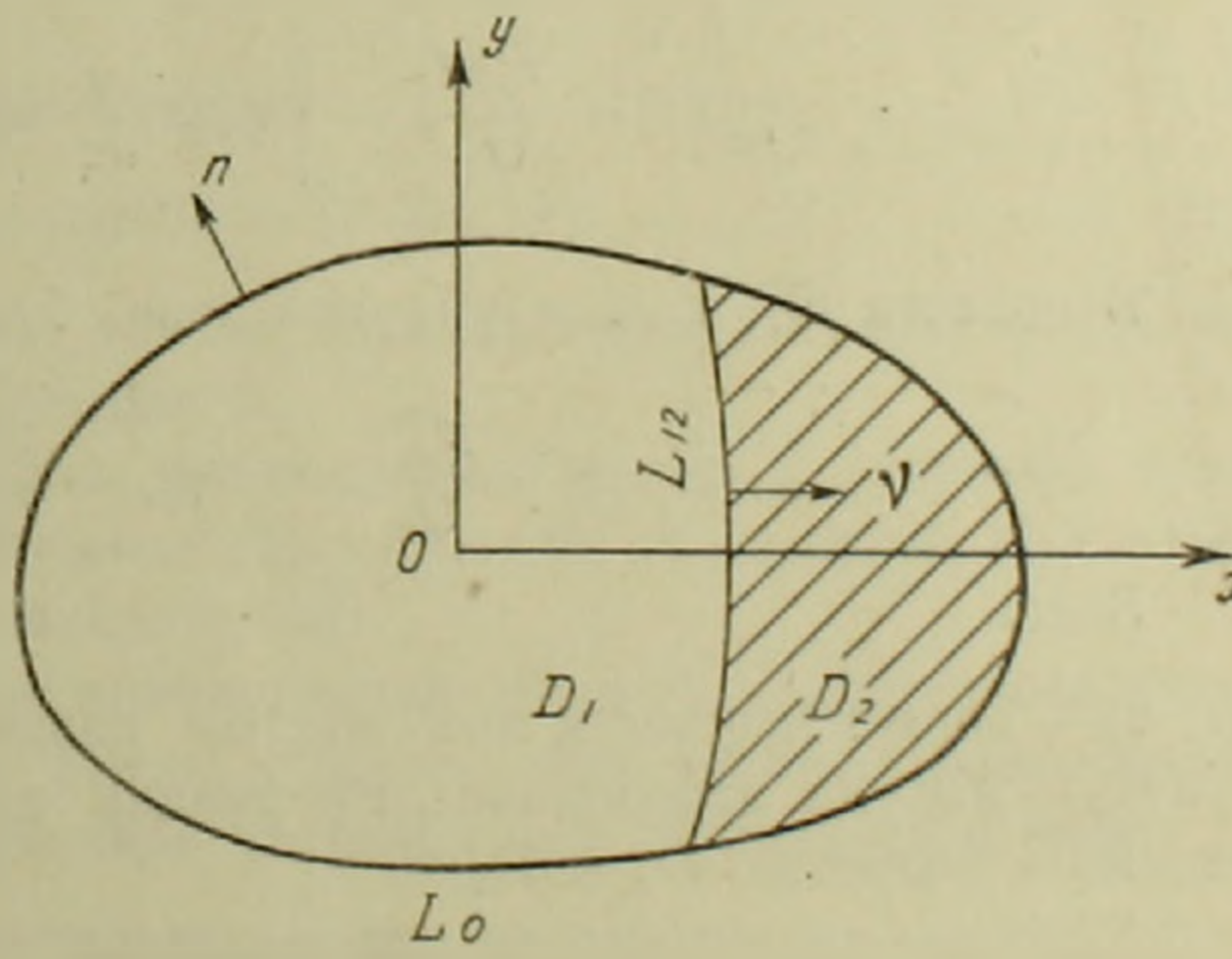

Рис. 1.

Обозначим компоненты тензора напряжения и тензора деформации в областях D_1 и D_2 соответственно через

$$\sigma_x^{(1)}, \ldots, \tau_{xy}^{(1)} \ldots; \ \varepsilon_x^{(1)} \ldots \ \gamma_{xy}^{(1)} \ldots;$$

$$\sigma_x^{(2)}, \ldots, \tau_{xy}^{(2)} \ldots; \ \varepsilon_x^{(2)}, \ldots, \gamma_{xy}^{(2)} \ldots$$

Положим далее, как и при кручении однородных стержней, что все компоненты напряжения за исключением $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ ($i = 1, 2$) равны нулю.

$$\sigma_x^{(i)} = \sigma_y^{(i)} = \sigma_z^{(i)} = \tau_{xy}^{(i)} = 0, \ (i = 1, \ 2). \tag{1}$$

Тогда уравнения равновесия для элемента стержня будут иметь вид:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \qquad (i = 1, \ 2). \tag{2}$$

Первые два из этих уравнений показывают, что распределение напряжения не зависит от координаты z, а следовательно, оно одинаково для всех поперечных сечений стержня. Что касается распределения напряжения по сечению, то оно должно быть таким, чтобы удовлетворить третьему из уравнений (2). Это требование может быть удовлетворено введением такой функции напряжений $F_i \ (i = 1, \ 2)$, зависящей от x, y и t, что

$$\begin{gathered} \tau_{xz}^{(1)} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(1)} = -\frac{\partial F_1}{\partial x}, \\ \tau_{xz}^{(2)} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}, \end{gathered} \tag{3}$$

где F_1 и F_2 — значения функций напряжений соответственно в областях D_1 и D_2.

Связь между компонентами напряжений и деформаций для области D_1 с учетом ползучести материала, как известно [1], может быть выражена в следующем виде:

$$\begin{gathered} \gamma_{xz}^{(1)}(t) = \frac{\tau_{xz}^{(1)}(t)}{G_1} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \tau_{xz}^{(1)}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \ \tau) d\tau, \\ \gamma_{yz}^{(1)}(t) = \frac{\tau_{yz}^{(1)}(t)}{G_1} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \tau_{yz}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \omega(t, \ \tau) d\tau. \end{gathered} \tag{4}$$

В области D_2, т. е. в упругой зоне, будем иметь

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\tau_{xz}^{(2)}}{G_2}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}^{(2)}}{G_2}. \tag{5}$$

Здесь

$\omega(t, \ \tau)$ — мера ползучести при чистом сдвиге материала области D_1, G_1 и G_2 — модули мгновенной деформации сдвига материалов соответственно в областях D_1 и D_2.

Условия совместимости деформаций в данном случае будут иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^{(i)}}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}^{(i)}}{\partial y}\right) = 0. \qquad (i = 1, \ 2). \tag{6}$$

Подставляя в эти уравнения выражения для $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$ $(i=1, 2)$ из (4) и пользуясь соотношениями (2) и (3), находим:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta F_1=\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}\Delta F_1\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t, \tau)d\tau,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta F_1=\int_{\tau_1}^{t}\frac{\partial}{\partial x}\Delta F_1\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t, \tau)d\tau, \tag{7}$$

где

$\Delta=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}$ — есть оператор Лапласа.

Соотношения (7) представляют систему однородных интегральных уравнений Вольтера второго рода с ядром:

$$K(t, \tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t, \tau),$$

которая, как известно, не имеет решений, отличных от нуля. Поэтому единственными решениями системы этих уравнений будут

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta F_1=0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Delta F_1=0. \tag{8}$$

Аналогичным путем из соотношений (2), (3) и (5) для F_2 непосредственно получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta F_2=0. \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Delta F_2=0. \tag{9}$$

Из уравнений (8) и (9) следует

$$\Delta F_i=A_i(t), \qquad (i=1, 2), \tag{10}$$

где $A_i(t)$ — некоторая, пока неизвестная функция в области D_i, которая зависит только от времени t.

Таким образом, функция напряжений $F_i(x, y, t)$, которая была введена при помощи соотношения (3), в каждой из областей $D_i (i=1, 2)$ должна удовлетворять уравнению (10).

Обозначим контур, ограничивающий область поперечного сечения стержня D, через L_0. Тогда условие, что боковая поверхность стержня свободна от воздействия внешних сил, запишется в виде

$$l\tau_{xz}^{(i)}+m\tau_{yz}^{(i)}=0, \tag{11}$$

где l и m — направляющие косинусы нормали n к контуру L_0. При этом

$$l=\cos(n, x)=\frac{dy}{ds}, \qquad m=\cos(n, y)=-\frac{dx}{ds}. \tag{12}$$

Пользуясь соотношениями (3) и (12), из условия (11) получим

$$\frac{\partial F_i}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial F_i}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial F_i}{ds}=0 \tag{13}$$

или, что

$$F_i=\text{const}=C_0 \text{ на контуре } L_0, \tag{14}$$

где C_0 — постоянная интегрирования.

Если обозначить через L_{12} линию раздела областей D_1 и D_2, то условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности L_{12}, запишутся в виде

$$l_1\tau_{xz}^{(i)}+m_1\tau_{yz}^{(1)}=l_1\tau_{xz}^{(2)}+m_1\tau_{yz}^{(2)}, \tag{15}$$

где l_1 и m_1 — направляющие косинусы нормали ν к линии раздела L_{12}.

Подставляя значения $\tau_{xz}^{(1)}$, $\tau_{yz}^{(1)}$, $\tau_{xz}^{(2)}$ и $\tau_{yz}^{(2)}$ из (3) в (15) и замечая, что на линии риздела L_{12}

$$l_1=\cos(\nu,\ x)=\frac{dy}{as},\qquad m_1=\cos(\nu.\ y)=-\frac{dx}{ds},$$

получим

$$\frac{\partial F_1}{\partial s}=\frac{\partial F_2}{\partial s} \tag{16}$$

или

$$F_1=F_2+C_{12} \text{ на линии раздела } L_{12}, \tag{17}$$

где C_{12} — некоторая произвольная постоянная.

Как было показано в работе ([2]), величины произвольных постоянных C_0 и C_{12} без нарушения общности могут быть приняты равными нулю.

Тогда вместо условий (14) и (17) окончательно получим

$$F_i=0 \text{ на } L_0,\quad (i=1,\ 2), \tag{18}$$

$$F_1=F_2 \text{ на } L_{12}. \tag{19}$$

Обозначим через u_i, v_i и w_i перемещения в соответствующих областях $D_i (i=1,\ 2)$. Тогда для составляющих деформаций будем иметь:

$$\gamma_{xz}^{(i)}=\frac{\partial u_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial x};\qquad \gamma_{yz}^{(i)}=\frac{\partial v_i}{\partial z}+\frac{\partial w_i}{\partial y}. \tag{20}$$

Подставляя значения $\gamma_{xz}^{(i)}$ и $\gamma_{yz}^{(i)}$ из выражений (4) и (5) в (20), получим:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x}=\frac{\tau_{xz}^{(i)}}{G_1}-\int_{\tau_1}^{t}\tau_{xz}^{(1)}(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t,\ \tau)d\tau-\frac{\partial u_1}{\partial z}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}^{(1)}}{G_1} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \tau_{yz}^{(1)}(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\omega(t, \tau)d\tau - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}^{(2)}}{G_2} - \frac{\partial u_2}{\partial z}; \qquad \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}^{(2)}}{G_2} - \frac{\partial v_2}{\partial z}. \tag{22}$$

Умножая первые уравнения (21) и (22) на $\frac{dx}{ds}$, а вторые уравнения на $\frac{dy}{ds}$ и пользуясь для $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ выражениями (3), находим

$$\frac{\partial w_1}{\partial s} = -\frac{1}{G_1}\frac{\partial F_1}{\partial \nu} + \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{\partial F_1}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \tau}\omega(t, \tau)d\tau - \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial s} = -\frac{1}{G_2}\frac{\partial F_2}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\frac{dx}{ds}. \tag{23}$$

Так как перемещения в направлении оси стержня w, а также двучленные выражения в (23), содержащие производные от переменных u и v, должны быть непрерывны по линии раздела L_{12}, то в силу этого из (23) непосредственно следует

$$\frac{1}{G_2}\frac{\partial F_2}{\partial \nu} = \frac{1}{G_1}\frac{\partial F_1}{\partial \nu} - \int\limits_{\tau_1}^{t} \frac{\partial F_1}{\partial \nu}\frac{\partial}{\partial \tau}\omega(t, \tau)d\tau. \tag{24}$$

Продифференцировав первые уравнения (21) и (22) по y, а вторые по x, находим, что правые части полученных соотношений должны быть равны. Земеняя в них значения $\tau_{xz}^{(i)}$ и $\tau_{yz}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ их соответствующими выражениями из (3), получим:

$$\frac{1}{G_1}\Delta F_1 - \int\limits_{\tau_1}^{t} \Delta F_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\omega(t, \tau)d\tau = -\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y \partial z}, \tag{25}$$

$$\frac{1}{G_2}\Delta F_2 = -\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y \partial z}. \tag{26}$$

Но, согласно (10), имеем:

$$\Delta F_i = A_i(t), \quad (i = 1, 2), \tag{27}$$

Тогда соотношения (25) и (26) можно записать в следующей форме:

$$A_1(t) - G_1\int\limits_{\tau_1}^{t} A_1(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\omega(t, \tau)d\tau = G_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right), \tag{28}$$

$$A_2(t) = G_2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right). \tag{29}$$

Пользуясь понятием о среднем вращении элемента в данной точке стержня Ω_i, которое определяется, как известно ([3]), зависимостью

$$2\Omega_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad (i = 1,\ 2), \tag{30}$$

придадим соотношениям (28) и (29) следующий вид:

$$A_1(t) - G_1\int_{\tau_1}^{t} A_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t,\ \tau)d\tau = -2G_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial z}, \tag{31}$$

$$A_2(t) = -2G_2\frac{\partial\Omega_2}{\partial z}. \tag{32}$$

Из соотношений (31) и (32) следует, что величины $\frac{\partial}{\partial s}\Omega_1$ и $\frac{\partial}{\partial z}\Omega_2$ не зависят от координат x, y и z, т. е. производные от углов поворота по z в каждой из областей $D_i\,(i = 1,\ 2)$ зависят только от времени t. Но вдоль линии раздела L_{12} имеем полное защемление, следовательно повороты областей D_1 и D_2 должны быть одинаковыми:

$$\frac{\partial\Omega_1}{\partial z} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial z} = \theta(t), \tag{33}$$

где $\theta(t)$ — угол скручивания на единицу длины стержня, зависящий только от времени t.

Тогда в силу (33) соотношения (31) и (32) примут вид:

$$A_1(t) - G_1\int_{\tau_1}^{t} A_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\omega(t,\ \tau)d\tau = -2G_1\theta(t), \tag{34}$$

$$A_2 = -2G_2\theta(t). \tag{35}$$

Для определения $\theta(t)$ воспользуемся условием равновесия для той части скручиваемого стержня, которая находится между торцовым и произвольным сечениями. Будем иметь:

$$M_{\text{кр}} = 2\iint_{D_1} F_1(x,\ y,\ t)dxdy + 2\iint_{D_2} F_2(x,\ y,\ t)dxdy. \tag{36}$$

Таким образом, задача о кручении призматического стержня, составленного из различных материалов, с учетом ползучести, свелась к определению непрерывной в области поперечного сечения стержня D функции напряжений $F_i(x,\ y,\ t)$, удовлетворяющей в соответствующих областях $D_i\,(i = 1,\ 2)$ дифференциальному уравнению (10), контурному условию (18) и условиям разрыва (24) ее нормальной производной на линии раздела L_{12}. При этом значения функций $A_1(t)$, $A_2(t)$ и $\theta(t)$ определяются из соотношений (34), (35) и (36).

Приложение полученных результатов к решению конкретных задач по кручению неоднородных стержней с учетом ползучести составляет содержание следующего сообщения.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ ԵՎ Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

Տարբեր նյութերից կազմված պրիզմաձև ձողերի ոլորման մասին՝ սողքի հաշվառումով

Ներկա աշխատանքում քննարկվում է կողմնային մակերևույթներով իրար հետ զոդված երկու տարբեր պրիզմաձև մարմիններից կազմված կամայական ընդլայնական կտրվածք ունեցող ձողի ոլորման խնդիրը, երբ ձողի հատվածքի D_1 տիրույթում նյութը օժտված է սողքի հատկությամբ, իսկ D_2 տիրույթում՝ առաձգական է։

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է ձողի ընդլայնական կտրվածքի $D=D_1+D_2$ տիրույթում անընդհատ լարվածությունների $F(x, y, t)$ ֆունկցիայի որոշմանը, որը բավարարում է D_1 և D_2 տիրույթներից յուրաքանչյուրում (10) հավասարմանը, (18) եզրային պայմանին և նորմալ ածանցյալի թռիչքի (24) պայմանին D_1 և D_2 տիրույթների բաժանման գծի վրա, ընդորում $A_1(t)$, $A_2(t)$ և $\theta(t)$ ֆունկցիաները որոշվում են (34), (35) և (36) հավասարումներից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.-Л., 1952 [2] *К. С. Чобанян*, „Известия" АН АрмССР, № 2, т. VIII (1955), серия физ.-мат., естеств. и техн. наук. [3] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости, 1937.