

МАТЕМАТИКА

С. Н. Мергелян, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Несколько замечаний по поводу аппроксимационной задачи
С. Н. Бернштейна

(Представлено 23 XII 1954)

1. В 1923 г. С. Н. Бернштейном была поставлена следующая задача.

Каким условиям должна удовлетворять неотрицательная функция $h(x)$, $-\infty < x < \infty$, для того, чтобы соотношение

$$\inf_{\{P\}} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} h(x) | f(x) - P(x) | \right\} = 0$$

выполнялось для всякой непрерывной функции $f(x)$ с условием

$$h(x) f(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm \infty.$$

В случае, когда весовая функция $h(x)$ убывает при $x \rightarrow \pm \infty$ достаточно регулярно, а именно так, что функция

$$|x| \frac{h'(x)}{h(x)}$$

монотонно стремится к $-\infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, задача была полностью решена в работах Н. И. Ахиезера и К. И. Бабенко⁽¹⁾, А. Л. Шагиняна⁽²⁾ и М. М. Джрбашяна⁽³⁾. Необходимое и достаточное условие полноты в смысле (1) заключается в расходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln h(x)}{1+x^2} dx, \quad (2)$$

причем необходимость этого условия справедлива для любых $h(x)$, без ограничения на регулярность их убывания. Преимуществом этого результата является то, что условие полноты формулируется непосредственно в терминах быстроты убывания функции $h(x)$. Существуют, однако, и другие подходы к решению задачи, когда те функции $h(x)$, для которых имеет место полнота, характеризуются не через скорость их убывания, а через другие свойства $h(x)$, выполнение или невыполнение которых по большей части также трудно проверить, как и сам



факт полноты. Из большого цикла работ в этом направлении приведем несколько примеров. В работах Н. И. Ахнезера и С. Н. Бернштейна (^{4, 5}) установлено, что если функция $h(x)$ такова, что множество тех точек, в которых $h(x) \neq 0$ имеет предельную точку на конечном расстоянии, то полнота будет иметь место для тех и только тех функций $h(x)$, для которых

$$\sup \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |Q(x)|}{1+x^2} dx = \infty,$$

где верхняя грань берется по всевозможным многочленам $Q(x)$ с условием

$$h(x) |Q(x)| \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

В работе Полларда (⁶) показано, что если $h(x)$ непрерывна и $h(x) > 0$, то необходимым и достаточным условием полноты является расходимость интеграла (2) и существование последовательности многочленов $p_n(x)$, для которых

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = \frac{1}{h(x)}, \quad 2. h(x) |p_n(x)| \leq \text{const}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Автором доказано (⁷), без каких-либо ограничений на $h(x)$, что необходимое и достаточное условие полноты в смысле (1) заключается в соотношении

$$M_{\frac{h(x)}{1+|x|}}(z) = \infty, \quad \text{Im } z \neq 0,$$

где $M_{\frac{h(x)}{1+|x|}}(z) = \sup |P(z)|$ в классе всех многочленов, удовлетворяющих неравенству *

$$h(x) |P(x)| \leq 1, \quad -\infty < x < \infty.$$

В этих трех примерах, очевидно, задача о полноте по существу не решается, а сводится к другим задачам, не менее сложным. В направлении же прямого решения задачи можно указать лишь приведенный в начале заметки результат о расходимости интеграла (2). После этого результата существенных сдвигов нет. Таким образом, аппроксимационная задача С. Н. Бернштейна пока еще далека от своего полного решения.

В настоящей заметке мы приводим несколько замечаний об этой задаче без ограничений на регулярность убывания функции $h(x)$ и на множество ее щелей. Эти замечания позволяют делать определенные суждения о специфике и трудностях решения задачи в общем случае.

* В формулировку теоремы 2 работы автора (⁷) вкралась опечатка. Вместо $M_h(z) \equiv \infty$ следует читать $M_{\frac{h}{1+|x|}}(z) \equiv \infty$.

2. а) Как бы медленно ни стремилась к нулю функция $\mu(x) > 0$ $|x| \rightarrow \infty$, можно указать такие весовые функции $h(x)$, что полнота с весом $h(x)$ в смысле (1) не имеет места, однако система полиномов становится полной, если в качестве веса рассматривать $\mu(x) h(x)$. В частности, из полноты с весом $h(x)$ не следует полнота с весом $(1 + |x|^{\epsilon}) h(x)$, $\epsilon > 0$.

б) Существуют функции $h(x)$, такие, что соотношение (1) справедливо, однако система линейных комбинаций всех целых положительных степеней z (без константы) оказывается не полной с весом $h(x)$ в классе функций $f(x)$, равных нулю при $x = 0$, непрерывных и $h(x) f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \pm \infty$.

в) Изменение значения функции $h(x)$ только в одной точке может привести к неполноте: существуют неотрицательные функции $h_1(x)$, $h_2(x)$, такие, что $h_1(x) = h_2(x)$, $x \neq a$, однако система полиномов полна с весом $h_1(x)$ и неполна с весом $h_2(x)$.

г) Как бы медленно ни стремилась к нулю функция $\nu(x)$, при $x \rightarrow \pm \infty$, при одном лишь условии, что

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \nu(x) |x|^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

оказывается возможным указать весовые функции $h(x)$, такие, что система полиномов с весом $h(x)$ полна, в то время как $h(x)$ убывает к нулю медленнее $\nu(x)$ на некоторой последовательности точек, уходящих в бесконечность:

$$h(x) \geq \nu(x), \quad x = x_1, x_2, \dots$$

Снять в этом утверждении ограничение (3) невозможно: как только предел левой части (3) не существует, или отличен от нуля, так, очевидно, система полиномов не полна с весом $\nu(x)$.

Приведенные выше предложения доказываются с помощью следующего критерия полноты для функций $h(x)$, отличных от нуля на множестве точек λ_k , $|\lambda_k| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$.

Пусть λ_k — последовательность точек на вещественной оси с единственной предельной точкой на бесконечности. Числам λ_k поставим в соответствие последовательность ϵ_k :

$$\epsilon_k = |\lambda_k^{-1-k} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k|.$$

Если $h(x) = 0$, $x \neq \lambda_i$ и

$$h(\lambda_k) = O(\epsilon_k), \quad (4)$$

то система полиномов полна с весом $h(x)$.

Если $\left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right| > \Delta > 1$ и $h(x)$ — произвольная неотрицательная функция, то из сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{h(\lambda_k)} \quad (5)$$

следует неполнота системы полиномов на оси с весом $h(x)$. Этот критерий выводится из теоремы 11, 12, 13. работы Холла ⁽⁸⁾ и упомянутого выше результата автора.

3. Доказательство сформулированных выше утверждений.

а) Для наперед заданного медленно убывающего множителя $\mu(x)$ рассмотрим непрерывную и строго монотонную функцию $\varphi(x) > 0$ с условием

$$\mu(x) < \varphi(|x|), \quad \varphi(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty.$$

Пусть $\lambda_k = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{k^2}\right)$, где $\varphi^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\varphi(x)$. Функцию $h(x)$ определим, полагая равной нулю вне $\{\lambda_k\}$, а в точках λ_k

$$h(\lambda_k) = k^2 \varepsilon_k.$$

Так как ряд (5) сходится, то система полиномов не полна с весом $h(x)$. Но

$$\varphi(\lambda_k) h(\lambda_k) = \frac{\varepsilon_k}{k}$$

и (4) выполнено, так что система полиномов полна с весом $\varphi(x) h(x)$ и, тем более, с весом $\mu(x) h(x)$.

б) Если бы система всех целых положительных степеней x была полна с весом $h(x)$ в классе непрерывных функций $f(x)$, $f(0) = 0$, $h(x) f(x) \rightarrow 0$, то для произвольной непрерывной $f(x)$, равной нулю вне некоторого отрезка, и для функции $h(x)$, равной нулю на отрезке $[-1, 1]$, мы имели бы

$$\inf \sup h(x) |x f(x) - x P(x)| = 0,$$

т. е. полноту системы полиномов с весом $(1 + |x|) h(x)$. Но выше было показано, что существуют $h(x)$ с условием (1), равные нулю на отрезке $[-1, 1]$ и такие, что вес $(1 + |x|) h(x)$ недостаточен для полноты.

в) Из пункта а) следует, что существует функция $h_0(x)$, равная нулю всюду на отрезке $[-1, 1]$, кроме $x = 0$, $h_0(0) = 1$, и такая, что (1) выполняется, однако система полиномов не полна с весом $(1 + |x|) h_0(x) = h_1(x)$. Пусть $h_1(x) = (1 + |x|) h_0(x)$, $x \neq 0$, $h_1(0) = 0$. Покажем, что для $h_1(x)$ соотношение (1) выполняется. В самом деле, из (1) для $h_0(x)$ следует, что для всякой непрерывной функции $f(x)$, равной нулю вне некоторого отрезка, и для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $P(x)$ с условием

$$h_0(x) |x f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

и, в частности, $|P(0)| < \varepsilon$, поэтому

$$h_0(x) |x f(x) - [P(x) - P(0)]| < C_0 \varepsilon.$$

Из этого неравенства, имея в виду, что $h_1(x) < 2|x| h_0(x)$, получаем

$$h_1(x) \left| f(x) - \frac{P(x) - P(0)}{x} \right| < 2C_0 \varepsilon,$$

т. е. для $h_1(x)$ справедливо (1).

г) По заданной функции $v(x)$ определим числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Пусть $\lambda_1 = 1$. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ уже определены, λ_k выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_k &> 2\lambda_{k-1} \\ v(\lambda_k) &< \frac{\varepsilon_{k-1}}{k} \left(\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \right)^{k-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Такое число λ_k существует в силу (3). Пусть

$$h(x) = 0, \quad x \neq \lambda_i, \quad h(\lambda_k) = \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Для построенной таким образом последовательности имеем, очевидно

$$h(\lambda_k) > v(\lambda_k).$$

Так как $h(\lambda_k) = 0$ (ε_k), система полиномов полна с весом $h(x)$.

4. Аппроксимационная задача С. Н. Бернштейна, как известно, связана с исследованием целых функций с заданной мажорантой на бесконечном множестве точек и нулей целых функций.

М. Л. Картрайт⁽⁹⁾ установлено, что целая функция первого порядка и типа $\sigma < \pi$, ограниченная в точках $0, \pm n$, обязана быть ограниченной на всей оси, и если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

Г. Сеге и Г. Поля (10) заметили, что если $f(z)$ целая функция первого порядка минимального типа и $|f(n)| = O(|n|^s)$, $s \geq 0$, то $f(z)$ — полином степени не выше s .

Если $f(z)$ — целая функция второго порядка минимального типа, то из ограниченности $f(z)$ во всех точках плоскости с целочисленными координатами следует, что $f(z) \equiv \text{const}$ (Уиттекер⁽¹¹⁾).

Мы приведем результаты, относящиеся к случаю медленно растущих целых функций, или же достаточно редких совокупностей точек, на которых функции ограничены.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ — произвольная последовательность точек на плоскости комплексного переменного z , удовлетворяющая условию

$$\left| \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \right| > \Lambda > 1. \quad (7)$$

Составим функцию

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) \quad (8)$$

и пусть

$$M(r) = \max_{|z| \leq r} |B(z)|.$$

Отметим следующие свойства целой функции $B(z)$, которые выводятся непосредственно из ее определения.

Если для какого-либо k

$$(1 + \delta) |\lambda_k| < |z| < (1 - \delta) |\lambda_{k+1}|,$$

то

$$|B(z)| > A M(|z|). \quad (9)$$

Постоянная A зависит лишь от точек $\{\lambda_k\}$ и числа $\delta > 0$. Для любого $k = 1, 2, \dots$

$$B M(|\lambda_k|) < |\lambda_k| |B'(\lambda_k)| < C M(|\lambda_k|), \quad (10)$$

где $B > 0$, $C > 0$ не зависят от k .

Пусть $G(z)$ — произвольная целая функция, растущая медленнее $M(|z|)$, т. е. удовлетворяющая неравенству

$$\max_{|z| \leq r} |G(z)| = O(M(r)). \quad (11)$$

Имеет место следующая интерполяционная формула

$$G(z) \equiv B(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(\lambda_k)}{B'(\lambda_k)} \frac{1}{z - \lambda_k}. \quad (12)$$

Для вывода этой формулы достаточно рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{G(t)}{B(t)(t-z)} dt,$$

распространенный по контуру $C_k: |t| = (1 + \delta) |\lambda_k|$, где $\delta > 0$ — достаточно мало, устремить k к бесконечности и воспользоваться (9).

Функция $B(z)$ является в известном смысле наимедленно растущей функцией, обращающейся в нуль в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Действительно, если целая функция $G(z)$ удовлетворяет (11) и имеет точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ нулями, то $G(z) \equiv 0$. Это непосредственно следует из (12). Если же

$$\max_{|z| \leq r} |G(z)| < K r^s M(r), \quad s \geq 0, \quad G(\lambda_k) = 0, \quad \text{то } G(z) \equiv Q_s(z) B(z),$$

где $Q_s(z)$ — многочлен степени $\leq s$.

Целая функция $G(z)$, удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \max_{|z| \leq r} |G(z)|}{\ln M(r)} = 0 \quad (13)$$

и ограниченная в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ тождественно равна постоянной.

В самом деле, из (13) следует, что каждая из функций $[G(z)]^n$ удовлетворяет (11) и следовательно для этих функций справедлива формула (12). Считая $|G(\lambda_k)| < N$, имеем

$$|G(z)|^n \leq |B(z)| \sum_{k=1}^n \frac{N}{|B'(\lambda_k)| \cdot |z - \lambda_k|}$$

поэтому, если $|z - \lambda_k| \geq 1$,

$$|G(z)| < LN \sqrt[n]{M(|z|)}.$$

Устремляя n к ∞ , получаем

$$|G(z)| \leq LN$$

в области $|z - \lambda_k| \geq 1$, а следовательно и всюду на плоскости, т. е. $G(z) \equiv \text{const}$. Отметим еще одно следствие из (12).

Произвольное семейство целых функций $G_n(z)$, удовлетворяющих (11), оказывается нормальным на всей плоскости, если

$$\sum_{k=1}^n \frac{|G_n(\lambda_k)|}{M(\lambda_k)} \leq 1.$$

Формулы, аналогичные (12), рассматривались в работах ⁽⁸⁾, ⁽⁹⁾ и др.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ն. ՍԵՐԳԵԼՅԱՆ

Մի քանի դիֆուզիայի թեորեմներ Ս. Ն. Քերնշտեյնի
ստատիստիկական խնդրի մասին

Այս հոդվածում բերվում են մի շարք դիֆուզիայի թեորեմներ Ս. Ն. Քերնշտեյնի հետևյալ խնդրի մասին:

Բնչյութի պայմանների պետք է բավարարի $h(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ ոչ բացասական ֆունկցիան, որպեսզի

$$\inf_{\{P\}} \{ \sup_{h(x)} |f(x) - P(x)| \} = 0$$

առնչությամբ $h(x)$ ունենա $(-\infty, +\infty)$ առանցքի վրա անընդհատ և $\lim_{|x| \rightarrow \infty} h(x) - f(x) = 0$,

պայմանին բավարարող ամեն մի $f(x)$ ֆունկցիայի համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. И. Ахиезер и К. И. Бабенко, ДАН СССР, т. 62, № 4 (1947), 315—319.
- ² А. Л. Шагинян, Сообщения Института математики и механики АН АрмССР, вып. 1, 1947.
- ³ М. М. Джрбашян, Метрические теоремы о полноте и о представимости аналитических функций, диссертация, Ереван, 1948.
- ⁴ Н. И. Ахиезер, ДАН СССР, т. 93, № 6, 1953, 949—952.
- ⁵ Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн, ДАН СССР, т. 92, № 6, 1953.
- ⁶ Г. Поллард, Proceedings of the American Mathematical Society, № 4, 1953, 863—875.
- ⁷ С. Н. Мергелян, ДАН СССР, т. 97, № 4, 1954, 597—600.
- ⁸ Г. Холм, Uppsala, 1950.
- ⁹ Л. Карпайт, The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 27, № 25, 1936, 46—55.
- ¹⁰ Г. Сеге, Jahresbericht der deutschen mathematiker Vereinigung, B. 43, 1—4, Heft. 1933, 10—11.
- ¹¹ И. М. Уиттекер, Proceedings of the London Mathematical Society, 37 (2), 1934, 383—401.