

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

А. М. Мхитарян

Об одном метеорологическом приложении теории конвекции большого масштаба

(Представлено Н. Х. Арутюняном 1 X 1954)

Изучение свободной конвекции большого масштаба очень важно для правильного понимания и объяснения некоторых гидротермодинамических процессов, происходящих в реальных атмосферных условиях под воздействием притока тепла от солнца, подстилающей поверхности и других, как, например, сезонных ветров — муссонов, береговых ветров — бризов и т. д.

В нашей статье (²) был обобщен предложенный академиком А. А. Дородницыным метод решения плоской нелинейной, нестационарной задачи о свободной тепловой конвекции большого масштаба на бесконечной плоской земле для случая конвекции на сферической земле, в поле силы Кориолиса и при наличии основного зонального потока до начала тепловой конвекции.

В той же статье приводится решение задачи при произвольном распределении температуры воздуха по поверхности сферической земли.

В качестве метеорологического приложения теории конвекции в настоящей работе мы покажем как определить распределение температуры воздуха по поверхности земли, пользуясь условием баланса тепла на земле.

§ 1. *Определение температуры почвы.* Прежде всего найдем распределение температуры почвы. Уравнение теплопроводности почвы имеет вид:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = k^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}, \quad (1)$$

здесь $T^*(\theta, \lambda, z, t)$ — отклонение температуры почвы, $k^*(\theta, \lambda)$ — коэффициент температуропроводности почвы, t — время. Система координат сферическая, θ — дополнение широты, λ — долгота, $z = r - a$ — вертикальная координата, a — радиус земного шара.

Перейдем к безразмерным величинам.

$$T^* = T_0 T_1, \quad t = \frac{a}{V} t_1, \quad z = H z, \quad (2)$$

где T_0 , V , a , H — характерные перепад температуры, горизонтальная скорость, длина и высота, соответственно, введенные для атмосферной задачи ⁽²⁾.

Вставляя (2) в (1), отбросив индексы и вспоминая соотношение:

$$\frac{VH^2}{a} = k$$

для атмосферы, где k — коэффициент температуропроводности воздуха, получим:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{k^*}{k} \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2}.$$

Сделаем замену $z \sqrt{\frac{k}{k^*}} = -z_1$, тогда будем иметь

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = \frac{\partial^2 T^*}{\partial z_1^2}. \quad (3)$$

Это уравнение мы будем решать методом, подробно изложенным в нашей работе ⁽²⁾.

Сделаем преобразование координат:

$$\theta = \theta_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad t = t_1, \quad \frac{z_1}{2\sqrt{t}} = \zeta_1.$$

Тогда уравнение (3) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial T^*}{\partial \zeta_1} - 4t \frac{\partial T^*}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Положим теперь

$$T^*(\theta, \lambda, \zeta, t) = t\Theta^*(\theta, \lambda, \zeta, t). \quad (5)$$

Заменяв еще $t^{1/2} = \tau$, придем окончательно к следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial \Theta^*}{\partial \zeta_1} - 2\tau \frac{\partial \Theta^*}{\partial \tau} - 4\Theta^* = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает распределение температуры почвы по глубине (θ и λ входят параметрически) и является аналогом уравнения (13) из ⁽²⁾, описывающего распределение температуры воздуха по высоте.

Естественно, решение уравнения (6) мы будем искать в том же виде (14) из ⁽²⁾.

$$\Theta^*(\theta, \lambda, \zeta_1, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1) \tau^n. \quad (7)$$

Подставляя ряд (7) в уравнение (6) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях τ , мы получим уравнения для определения всех коэффициентов ряда (7) — Θ_n^* .

Так, для всех n будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \Theta_n^*}{\partial \zeta_1^2} + 2\zeta_1 \frac{\partial \Theta_n^*}{\partial \zeta_1} - 2(n+2)\Theta_n^* = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) второго порядка по ζ_1 .

Прежде чем поставить краевые условия, заметим следующее. Так как мы ищем отклонения температуры, то естественно поставить условие затухания температурных возмущений на большой глубине, т. е. при $\zeta_1 \rightarrow \infty$ $\Theta_n^* = 0$.

На поверхности же земли мы будем считать, что температуры почвы и воздуха совпадают, а это значит что $\Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1)$ при $\zeta_1 = 0$ должны совпадать с теми $f_n(\theta, \lambda)$, с которыми совпадают $\Theta_n(\theta, \lambda, \zeta)$ при $\zeta = 0$ для воздуха из (2).

Итак, краевые условия будут иметь вид: 1) при $\zeta_1 = 0$, $\Theta_n^* = f(\theta, \lambda)$, 2) при $\zeta_1 \rightarrow \infty$, $\Theta_n^* = 0$. (9)

При краевых условиях (9) уравнение (8) имеет следующее решение:

$$\Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1) = f_n(\theta, \lambda) \cdot L_{n+2}(\zeta_1), \quad (10)$$

где
$$L_n(\zeta) = A_n \int \left[\int \int \int \dots \int e^{-x} (dx)^n \right] dx,$$

A_n — постоянные¹.

Таким образом, здесь также решение проводится до конца при произвольном распределении температуры по поверхности земли.

§ 2. *Определение функций $f_n(\theta, \lambda)$.* Для определения функций $f_n(\theta, \lambda)$ воспользуемся условием баланса тепла на земле.

При наличии собственного излучения земли как черного тела и встречного притока тепла от солнца условие баланса энергии на земле имеет вид (см. напр. (1, 3) и т. д.).

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} + K^* \frac{\partial T^*}{\partial z} = (1-A) W - bT, \text{ при } z = 0, \quad (11)$$

Здесь $T(\theta, \lambda, z, t)$ и $T^*(\theta, \lambda, z, t)$ — отклонения температур воздуха и почвы от их зонального значения, A — альбедо земной поверхности.

$W(\theta, t)$ — отклонение притока тепла от солнца от его зонального значения. $K = c_p \rho k$, $K^* = c^* \rho^* k^*$, c_p , c^* — коэффициенты теплоемкости воздуха и почвы, ρ , ρ^* — плотности воздуха и почвы, k , k^* — коэффициенты температуропроводности воздуха и почвы, K , K^* — коэффициенты теплопроводности воздуха и почвы. $b = 4\sigma \bar{T}^3$ — постоянная, σ — постоянная Больцмана, $\bar{T}$ — средняя по всему земному шару температура.

¹ Подробно см. нашу статью (2).

Перейдем к тем же безразмерным величинам, тогда, отбросив индексы, условие баланса (II) приведем к виду:

$$-K \frac{\partial T}{\partial z} + K^* \frac{\partial T^*}{\partial z_1} = (1-A) \frac{H}{T_0} W - bHT.$$

Вспомогательные преобразования

$$\frac{z}{2\sqrt{t}} = \zeta, \quad \frac{-z_1 \sqrt{\frac{k}{k^*}}}{2\sqrt{t}} = \zeta_1,$$

и соотношения:

$$\begin{aligned} T(\theta, \lambda, \zeta, t) &= t\Theta(\theta, \lambda, \zeta, t), \\ T^*(\theta, \lambda, \zeta_1, t) &= t\Theta^*(\theta, \lambda, \zeta_1, t), \\ \tau^2 &= t, \end{aligned}$$

придем к следующему выражению условия баланса:

$$-K\tau \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} - K^*\tau \frac{\partial \Theta^*}{\partial \zeta_1} \sqrt{\frac{k}{k^*}} = \frac{2H}{T_0} (1-A)W - 2bH\tau^2\Theta, \quad (12)$$

но

$$\Theta(\theta, \lambda, \zeta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n(\theta, \lambda, \zeta) \tau^n,$$

$$\Theta^*(\theta, \lambda, \zeta_1, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \Theta_n^*(\theta, \lambda, \zeta_1) \tau^n,$$

тогда, представив приток тепла от солнца, зависящий от широты места и времени, в таком же виде:

$$W(\theta, \tau) = \tau^2 \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\theta) \tau^n, \quad (13)$$

и подставив все это в (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ справа и слева, получим следующие соотношения для определения $f_n(\theta, \lambda)$ при всех n :

$$-K \left(\frac{\partial \Theta_n}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} - K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}} \left(\frac{\partial \Theta_n^*}{\partial \zeta_1} \right)_{\zeta_1=0} = \frac{2H}{T_0} (1-A) W_{n-1} - 2bH \Theta_{n-1} \Big|_{\zeta=0}. \quad (14)$$

Воспользуемся теперь решениями (17) из (2) для Θ_n и (10) настоящей статьи для Θ_n^* :

При $n = 0, 1, 2$ имеем:

$$\begin{aligned} \Theta_n &= f_n L_{n+2}(\zeta), \\ \Theta_n^* &= f_n L_{n+2}(\zeta_1), \end{aligned}$$

но $\frac{d}{d\zeta} L_n \Big|_{\zeta=0} = \frac{A_n}{A_{n-1}} L_{n-1} \Big|_{\zeta=0} = \frac{A_n}{A_{n-1}}$, так как $L_n(0) = 1$.

Подстановка в (14) дает:

$$-Kf_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} - K^* f_n \frac{A_{n+2}}{A_{n+1}} \sqrt{\frac{k}{k^*}} = \frac{2H}{T_0} (1 - A) W_{n-1} - 2bHf_{n-1}$$

или

$$f_n = -\frac{A_{n+1}}{A_{n+2}} \left(\frac{2H}{T_0} \frac{W_{n-1}}{\Pi} - \frac{2Hb}{\Pi} f_{n-1} \right) \dots \quad (n = 0, 1, 2).$$

(Здесь и далее мы множитель $(1 - A)$ опускаем.)

$$\Pi = K + K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}}. \quad (15)$$

Итак

$$f_0 = 0, \\ f_1 = -\frac{A_2}{A_3} \frac{2H}{T_0} \frac{W_0}{\Pi}. \quad (16)$$

$$f_2 = -\frac{2H}{A_4 T_0 \Pi} \left(A_3 W_1 + A_2 \frac{2Hb}{\Pi} W_0 \right).$$

При $n = 3, 4$

$$\Theta_n = f_n L_{n+2} + \frac{nc}{2} \frac{A_{n-1}}{A_n} \frac{\partial f_{n-3}}{\partial \lambda} (L_{n+2} - 2L_n + L_{n-2});$$

откуда легко вычислить $\left(\frac{\partial \Theta_n}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0}$ и подстановка в (14) дает:

$$f_3 = -\frac{2H}{A_5 T_0 \Pi} \left[A_4 W_2 + A_3 \frac{2Hb}{\Pi} W_1 + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_0 \right],$$

$$f_4 = -\frac{2H}{A_6 T \Pi} \left[A_5 W_3 + A_4 \frac{2Hb}{\Pi} W_2 + A_3 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_1 + \right. \\ \left. + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^3 W_0 + A_2 Kc \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{W_0}{\Pi} \right] \quad \text{и т. д.}$$

$$f_8 = -\frac{2H}{A_{10} T_0 \Pi} \left\{ A_9 W_7 + A_8 \frac{2Hb}{\Pi} W_6 + A_7 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^2 W_5 + A_6 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^3 W_4 + \right. \\ \left. + A_5 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^4 W_3 + A_4 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^5 W_2 + A_3 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^6 W_1 + A_2 \left(\frac{2Hb}{\Pi} \right)^7 W_0 + \right. \\ \left. + 4KM \sin 2\Theta \left[A_4 \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_2}{\Pi} + A_3 2Hb \left(\frac{1}{\Pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_1}{\Pi} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_1}{\Pi^2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + A_2 (2Hb)^2 \left(\frac{1}{\Pi^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_0}{\Pi} + \frac{1}{\Pi} \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_0}{\Pi^2} + \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_0}{\Pi^3} \right) \right] \right\} + \dots \quad \text{и т. д.}$$

В f_0 уже появляются нелинейные члены:

$$\frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \frac{4H^2}{T_0^2} \frac{K}{\Pi} \left(\frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{W_0}{\Pi} \right)^2 \quad \text{и} \quad \frac{A_{10}}{A_{11}} \frac{4}{9\sqrt{\pi}} \frac{4H^2}{T_0^2} \frac{K}{\Pi} \frac{W_0}{\Pi} \Delta \frac{W_0}{\Pi}, \quad \text{где}$$

$$\Delta = \frac{1}{\sin \Theta} \left[\frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right] - \text{оператор Лапласа.}$$

Во всех этих выражениях W_n зависит только от широты — Θ , а $\Pi = K + K^* \sqrt{\frac{k}{k^*}}$ существенно зависит как от широты места,

так и от долготы, поскольку коэффициент теплопроводности почвы совершенно различен для различных типов подстилающей поверхности, как, например, водное пространство, пески, растительный покров и т. д.

Таким образом, если бы нам было известно разложение (13), т. е. все $W_n(\Theta)$, то мы по полученным формулам легко подсчитали бы все функции $f_n(\Theta, \lambda)$, а затем по формулам из (2) рассчитали бы все Θ_n , φ_n , ψ_n и σ_n , т. е. решали бы задачу до конца. Во всех $f_n(\Theta, \lambda)$ множитель $(1 - A)$ нами был опущен, поэтому при расчетах все $W_n(\Theta)$ нужно предварительно умножить на $(1 - A)$. В решение вошла также и функция $\Pi(\Theta, \lambda)$, которую следует задать, учитывая реальную конфигурацию материков и океанов. Этим вопросам будет посвящена наша следующая статья.

Водно-энергетический институт
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ՄԽԻՏԱՐՅԱՆ

Մեծ մասշտաբի կոնվեկցիայի տեսության մետոռոլոգիական և կիրառության մասին

Մեր (2) հոդվածում բերվում է մեծ մասշտաբի կոնվեկցիայի ոչ ստացիոնար, ոչ դժային խնդրի լուծումը երկրի ղեղային մակերևույթի վրա օդի ջերմաստիճանի կամայական բաշխման դեպքում:

Այս աշխատանքում տրվում է երկրի մակերևույթի վրա օդի ջերմաստիճանի բաշխման խնդրի լուծումը, ելնելով ջերմային բալանսի պայմանից: Այդ նպատակով նախորոշվում է հոդի ջերմաստիճանի բաշխումն ըստ խորության, օդովելով (1) հավասարումից:

Կատարելով փոփոխականի ձևափոխում և (5) տեղադրում, ստացվում է (6) հավասարումը, որի լուծումը փնտրվում է (7) տեսքով: Այդ դեպքում շարքի գործակիցները որոշվում են (8) հավասարումից (9) սահմանային պայմանների դեպքում:

Լուծումը ստացվում է (10) տեսքով:

Վերջին արտահայտության մեջ մտնող $f_n(\Theta, \lambda)$ ֆունկցիաները որոշվում են երկրի մակերևույթի վրա ջերմային բալանսի (14) պայմանից: Իրա համար օդովում ենք (2) հոդվածում բերված օդի ջերմաստիճանի ըստ բարձրության բաշխման խնդրի լուծումից և այս հոդվածի (10) լուծումից: Ինելով ջերմաստիճանի անընդհատության պայմանը երկրի մակերևույթի վրա, մենք հնարավորություն ենք ստանում լուծել խնդիրը նշված ֆունկցիաների համար ստացվում են (18) արտահայտությունները, ընդ որում f_0 -ի մեջ արդեն հանդես են գալիս ոչ դժային անդամներ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. А. Дородницын, ДАН СССР, XXX, 5, 1940. ² А. М. Мхитарян, ДАН АрмССР, XIX, 2, 1954. ³ М. Е. Швец, Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 4, 1943