ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XX 1955 3

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С. Х. Туманян

Асимптотическое исследование мультиномиального распределения вероятностей

(Представлено В. А. Амбарцумяном 18 I 1955)

Пусть производится n независимых испытаний по отношению к некоторому событию A, вероятность наступления которого в каждом испытании равна p.

Тогда, как известно, вероятность того, что событие A осуществится ровно m раз, $0 < m \leqslant n$, определяется соотношением

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (q = 1 - p). \tag{1}$$

Распределение вероятностей, определяемое ф-лой (1), известно в теории вероятностей как биномиальное распределение.

В работе П. А. Козуляева ([1]) было изучено асимптотическое поведение $P_n(m)$ при $n \to \infty$ и различных соотношениях между n и p.

Было доказано, что если $p = \frac{a}{\varphi(n)}$, где $a > 0$ — постоянная, а $\varphi(n)$ — функция, бесконечно возрастающая вместе с n, то, в зависимости от порядка роста $\varphi(n)$, могут представиться лишь следующие три случая:

1. $P_n(0) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 1$ и $P_n(m) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$

для любых $m > 0$, т. е. предельным законом распределения случайной величины m является несобственный закон.

2. $P_n(m) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ (λ — постоянная), т. е. предельным законом распределения случайной величины m является закон Пуассона.

3. Равномерно в каждом конечном интервале значений

$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ справедливо соотношение

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + o(1)\right).$$

В этом случае, как известно, для любого z

$$P\left\{\frac{m-np}{\sqrt{npq}}<z\right\} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

т. е. предельной функцией распределения случайной величины $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$ является нормальная функция распределения.

Более детальному изучению асимптотического поведения биномиального распределения посвящена работа Ю. В. Прохорова ([2]).

Нашей задачей является провести асимптотическое исследование мультиномиального распределения вероятностей.

Пусть производится n независимых испытаний по отношению к несовместимым событиям $A_1, A_2, \ldots A_s$, вероятности которых в каждом испытании равны соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_s$

и
$$\sum_{i=1}^{s} p_i = 1.$$

Тогда, как известно, вероятность того, что при n испытаниях событие A_1 осуществится m_1 раз, событие $A_2 - m_2$ раз, ..., событие $A_s - m_s$ раз $\left(\sum_{i=1}^{s} m_i = n\right)$ определяется соотношением

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}. \tag{2}$$

Распределение вероятностей, определяемое соотношением (2), называется в теории вероятностей мультиномиальным распределением.

Мы хотим изучить асимптотическое поведение $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ при $n\to\infty$ и различных соотношениях между $n, p_1, p_2, \ldots$ и p_s.

Прежде всего известно, что если вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_s$ являются постоянными, то при $n\to\infty$ равномерно относительно всех m_i $(i=1, 2, \ldots, s)$, для которых

$$x_i = \frac{m_i - np_i}{\sqrt{np_i q_i}} \quad (q_i = 1-p_i) \tag{3}$$

находятся в конечных интервалах,

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-1} p_1 p_2 \ldots p_s}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{s} q_i x_i^2}\,(1+o(1)). \tag{4}$$

(Многомерная локальная предельная теорема Лапласа.)

Из локальной теоремы Лапласа следует также и интегральная теорема Лапласа, заключающаяся в том, что какова бы ни была $(s-1)$-мерная область G, для которой

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \sqrt{np_i q_i} = 0,$$

равномерно относительно G имеет место соотношение

$$P(G) \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{q_1 q_2 \ldots q_s}{(2\pi)^{s-1} \sum_{i=1}^{s} p q_i}} \int_G e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{s} q_i x_i^2} dv,$$

где dv — элемент объема области G (см. напр. ([3]), стр. 78).

Теперь предположим, что вероятности p_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ не являются постоянными.

Пусть

$$p_i = \frac{a_i}{\varphi_i(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1), \; p_s = 1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}, \tag{5}$$

где $a_i > 0$ — постоянные, $\varphi_i(n)$ — функции, бесконечно возрастающие с n и удовлетворяющие предельному соотношению

$$\frac{\varphi_i(n)}{n} \underset{(n \to \infty)}{\longrightarrow} C_i, \; 0 \leqslant C_i \leqslant \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{6}$$

Рассмотрим возможные случаи:

I. $C_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$.

В этом случае из (5) и (6) следует, что

$$np_i \to \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \text{ при } n \to \infty,$$

а так как согласно (3)

$$m_i = np_i + x_i \sqrt{np_i q_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

то величины m_i также безгранично возрастают при $n \to \infty$, если только x_i находятся в конечных интервалах.

Поэтому, чтобы найти предельное соотношение для (2), можно ко всем факториалам в соотношении (2) применить формулу Стирлинга и далее поступать совершенно таким же образом, как при доказательстве локальной теоремы Лапласа для общего случая схемы независимых испытаний (см. напр. ([3]), стр. 65—67).

При этом легко обнаружить, что оценки, используемые для доказательства теоремы Лапласа, верны не только при $n \to \infty$ и постоянных p_i, но и в данном случае, т. е. когда $p_i \to 0$ при $n \to \infty$, но так, что $np_i \to \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$.

Следовательно, в рассматриваемом случае также справедливо соотношение (4), т. е. при $n \to \infty$

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-1} p_1 p_2 \ldots p_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} q_i x_i^2} (1+o(1))$$

равномерно для всех m_i ($i = 1, 2, \ldots, s$), для которых $x_i = \frac{m_i - np_i}{\sqrt{np_i q_i}}$ находятся в конечных интервалах.

II. $0 < C_i < \infty$ $\qquad (i = 1, 2, \ldots, s-1)$.

В этом случае, при $n \to \infty$ величины np_i ($i = 1, 2, \ldots, s-1$), как это следует из (5) и (6), остаются ограниченными, а, следовательно, остаются ограниченными также и величины m_i ($i = 1, 2, \ldots, s-1$).

Заменив в соотношении (2) вероятности p_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) по формулам (5), получим:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) =$$

$$= \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!} \left(\frac{a_1}{\varphi_1(n)}\right)^{m_1} \left(\frac{a_2}{\varphi_2(n)}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{a_{s-1}}{\varphi_{s-1}(n)}\right)^{m_{s-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{m_s} =$$

$$= \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{s-1}^{m_{s-1}}}{m_1!\, m_2! \ldots m_{s-1}!} \cdot \frac{n!}{(n - m_1 - m_2 - \cdots - m_{s-1})!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{(\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \ldots (\varphi_{s-1}(n))^{m_{s-1}}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{n - \sum_{i=1}^{s-1} m_i} =$$

$$= \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{s-1}^{m_{s-1}}}{m_1!\, m_2! \ldots m_{s-1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_{s-1} - 1}{n}\right)}{\left(\frac{\varphi_1(n)}{n}\right)^{m_1} \left(\frac{\varphi_2(n)}{n}\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n}\right)^{m_{s-1}}} \cdot$$

$$\cdot e^{\left(n - \sum_{i=1}^{s-1} m_i\right) \ln \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)},$$

а так как ввиду соотношения (6) и ограниченности m_i ($i = 1, 2, \ldots, s-1$) при $n \to \infty$

$$\left(n - \sum_{i=1}^{s-1} m_i\right) \ln \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a}{\varphi_i(n)}\right) = -n \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)} +$$

$$+ O\left(\frac{n}{\varphi_i^2(n)}\right) \to -\sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{C_i},$$

то

$$P_n(m_1, m_2 \dots m_s) \xrightarrow[(n\to\infty)]{} \frac{\left(\frac{a_1}{C_1}\right)^{m_1}\left(\frac{a_2}{C_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{a_{s-1}}{C_{s-1}}\right)^{m_{s-1}}}{m_1!\, m_2! \dots m_{s-1}!}\, e^{-\sum\limits_{i=1}^{s-1}\frac{a_i}{C_i}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{s-1} \frac{\left(\frac{a_i}{C_i}\right)^{m_i} e^{-\frac{a_i}{C_i}}}{m_i!}.$$

III. $C_i = \infty \quad (i = 1, 2, \dots, s-1)$.

В данном случае из (5) и (6) вытекает, что $np_i \to 0$ $(i=1, 2, \dots, s-1)$ при $n \to \infty$. При этом, если хотя бы одно из чисел m_i $(i=1, 2, \dots, s-1)$ отлично от нуля, то

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) =$$

$$= \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_{s-1}^{m_{s-1}}}{m_1! m_2! \dots m_{s-1}!} \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m_1+m_2+\dots+m_{s-1}-1}{n}\right)}{\left(\frac{\varphi_1(n)}{n}\right)^{m_1}\left(\frac{\varphi_2(n)}{n}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\varphi_{s-1}(n)}{n}\right)^{m_{s-1}}} \cdot$$

$$\cdot \left(1-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{n-\sum\limits_{i=1}^{s-1} m_i} < \prod_{i=1}^{s-1}\frac{a_i^{m_i}}{m_i!}\left(\frac{n}{\varphi_i(n)}\right)^{m_i} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Если же $m_1 = m_2 = \dots = m_{s-1} = 0$, то $m_s = n$ и, как это следует из (2) и (5),

$$P_n(0, 0, \dots, 0, n) = \left(1-\sum_{i=1}^{s-1}\frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^n.$$

Логарифмируя обе части последнего равенства, найдем, что

$$\ln P_n(0, 0, \dots, 0, n) = 0\left(\frac{n}{\varphi_i(n)}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно,

$$P_n(0, 0, \dots, 0, n) \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

IV. Теперь рассмотрим случай, когда

$$0 < C_i < \infty, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$C_i = 0, \quad i = k+1, k+2, \dots, s-1 \quad (1 \leqslant k \leqslant s-2).$$

Очевидно, что в этом случае при безграничном возрастании n величины np_i остаются ограниченными при $i = 1, 2, \dots, k$ и безгранично возрастают при $i = k+1, k+2, \dots, s-1, s$, а следовательно, и величины m_i должны быть ограниченными при $i = 1, 2, \dots, k$ и безгранично возрастать при $i = k+1, k+2, \dots, s-1, s$.

Как нетрудно убедиться, соотношение (2), если в нем заменить p_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) по формулам (5), можно представить в следующем виде:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) =$$

$$= \frac{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_k^{m_k}}{m_1!\, m_2! \ldots m_k!} \cdot \frac{n!}{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)! \, (\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \ldots (\varphi_k(n))^{m_k}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)!}{m_{k+1}!\, m_{k+2}! \ldots m_s!} \, p_{k+1}^{m_{k+1}} p_{k+2}^{m_{k+2}} \ldots p_s^{m_s}. \quad (7)$$

Таким образом, вероятность $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s)$ представлена в (7) в виде произведения трех сомножителей. Первый из этих сомножителей от n не зависит; что касается второго сомножителя, то легко видеть, что согласно (6)

$$\frac{n!}{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)! \, (\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \ldots (\varphi_k(n))^{m_k}} =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i - 1}{n}\right)}{\left(\frac{\varphi_1(n)}{n}\right)^{m_1} \left(\frac{\varphi_2(n)}{n}\right)^{m_2} \ldots \left(\frac{\varphi_k(n)}{n}\right)^{m_k}} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \frac{1}{C_1^{m_1} C_2^{m_2} \ldots C_k^{m_k}}. \quad (8)$$

Для третьего сомножителя введем обозначение

$$P_n'(m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_s) = \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)!}{m_{k+1}!\, m_{k+2}! \ldots m_s!} \, p_{k+1}^{m_{k+1}} p_{k+2}^{m_{k+2}} \ldots p_s^{m_s}. \quad (9)$$

Пусть

$$p_i' = \frac{p_i}{\sum_{j=k+1}^{s} p_j} \qquad (i = k+1, k+2, \ldots, s). \quad (10)$$

Очевидно,

$$\sum_{i=k+1}^{s} p_i' = 1.$$

Согласно (9) и (10) имеем:

$$P'_n(m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_s) =$$

$$= \frac{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)!}{m_{k+1}!\,m_{k+2}!\dots m_s!} (p'_{k+1})^{m_{k+1}} (p'_{k+2})^{m_{k+2}} \dots (p'_s)^{m_s} \left(\sum_{i=k+1}^{s} p_i\right)^{\sum_{i=k+1}^{s} m_i} .$$

Но, во-первых,

$$\left(\sum_{i=k+1}^{s} p_i\right)^{\sum_{i=k+1}^{s} m_i} = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{n - \sum_{i=1}^{k} m_i} = e^{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right) \ln\left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)} =$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{k} \frac{\frac{a_i}{\varphi_i(n)}}{n} + o\left(\frac{n}{\varphi_i(n)}\right)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} e^{-\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{c_i}},$$

во-вторых, при $n \to \infty$

$$\frac{\left(n - \sum_{i=1}^{k} m_i\right)!}{m_{k+1}!\,m_{k+2}!\dots m_s!} (p'_{k+1})^{m_{k+1}} (p'_{k+2})^{m_{k+2}} \dots (p'_s)^{m_s} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-k-1} p'_{k+1} p'_{k+2} \cdots p'_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{s} q'_i x'^2_i} (1 + o(1)),$$

$$q'_i = 1 - p'_i$$

равномерно для всех m_i $(i = k+1,\ k+2, \dots, s)$, для которых $x'_i = \frac{m_i - np'_i}{\sqrt{np'_i q'_i}}$ находятся в конечных интервалах.

Таким образом,

$$P'_n(m_{k+1}, m_{k+2}, \dots, m_s) =$$

$$= e^{-\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{c_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-k-1} p'_{k+1} p'_{k+2} \cdots p'_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{s} q'_i x'^2_i} (1 + o(1)). \quad (11)$$

Следовательно, из (7), (8), (9) и (11) окончательно получаем, что при $n \to \infty$

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{\left(\frac{a_i}{C_i}\right)^{m_i} e^{-\frac{a_i}{C_i}}}{m_i!} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-k-1} p'_{k+1} p'_{k+2} \cdots p'_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} q'_i x'^2_i} (1 + o(1))$$

равномерно для всех m_i $(i = k+1,\ k+2, \ldots, s)$, для которых x_i' находятся в конечных интервалах.

V. $C_i = \infty$ при $i = 1, 2, \ldots, k$,

$C_i = 0$ при $i = k+1,\ k+2, \ldots, s-1$ $(1 \leqslant k \leqslant s-2)$.

В этом случае, если хотя бы одно из m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ отлично от нуля, то второй сомножитель в соотношении (7) при $n \to \infty$ стремится к нулю, а потому $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0$. Если же $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 0$, то первый и второй сомножители в (7) равны единице и, следовательно, согласно (9) и (11) при $n \to \infty$

$$P_n(0, \ldots, 0, m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_s) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-k-1} p_{k+1} p_{k+2} \cdots p_s}} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=k+1}^{s} q_i' x_i'^2} (1 + o(1))$$

равномерно для всех m_i $(i = k+1,\ k+2, \ldots, s)$, для которых x_i' находятся в конечных интервалах.

VI. $C_i = \infty$ при $i = 1, 2, \ldots, k$,

$0 < C_i < \infty$ при $i = k+1,\ k+2, \ldots, s-1$ $(1 \leqslant k \leqslant s-2)$.

В этом случае, заменяя в соотношении (2) вероятности p_i $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ по формулам (5), получим:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) =$$

$$\prod_{i=1}^{s-1} \frac{a_i^{m_i}}{m_i!} \cdot \frac{n!}{m_s!\, (\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \cdots (\varphi_{s-1}(n))^{m_{s-1}}} \left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{s-1} m_i}.$$

Поступая так же, как в предыдущих случаях, легко докажем, что

$$\left(1 - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{a_i}{\varphi_i(n)}\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{s-1} m_i} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} e^{-\sum\limits_{i=k+1}^{s-1} \frac{a_i}{C_i}}, \quad \text{а}$$

$$\frac{n!}{m_s!\, (\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \cdots (\varphi_{s-1}(n))^{m_{s-1}}} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0,$$ если хотя бы одно из m_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ отлично от нуля и

$$\frac{n!}{m_s!\, (\varphi_1(n))^{m_1} (\varphi_2(n))^{m_2} \cdots (\varphi_{s-1}(n))^{m_{s-1}}} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \frac{1}{C_{k+1}^{m_{k+1}} C_{k+2}^{m_{k+2}} \cdots C_{s-1}^{m_{s-1}}},$$

если $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 0$.

Поэтому

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0,$$ если хотя бы одно из m_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ отлично от нуля и

$$P_n(0, 0, \ldots, 0, m_{k+1}\, m_{k+2}, \ldots, m_s) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \prod_{i=k+1}^{s-1} \frac{\left(\frac{a_i}{C_i}\right)^{m_i} e^{-\frac{a_i}{C_i}}}{m_i\,!}.$$

VII. $C_i = \infty$ при $i = 1, 2, \ldots, k$,

$0 < C_i < \infty$ при $i = k+1, k+2, \ldots, l$,

$C_i = 0$ при $i = l+1, l+2, \ldots, s-1$.

Ограничимся формулировкой результата:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) \xrightarrow[(n \to \infty)]{} 0,$$ если хотя бы одно из m_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ отлично от нуля

и при $n \to \infty$.

$$P_n(0, 0, \ldots, 0, m_{k+1}\, m_{k+2}, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots, m_s) =$$

$$= \prod_{i=k+1}^{l} \frac{\left(\frac{a_i}{C_i}\right)^{m_i} e^{-\frac{a_i}{C_i}}}{m_i\,!} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi n)^{s-l-1} p'_{l+1} \cdots p'_s}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=l+1}^{s} q'_i x'_i} \qquad (1 + o(1))$$

равномерно относительно m_i $(i = l+1, \ldots, s)$, для которых x'_i находятся в конечных интервалах.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Խ. ԹՈՒՄԱՆՅԱՆ

Հավանականությունների մուլտինոմիալ բաշխման ասիմպտոտիկ ուսումնասիրությունը

Դիցուք կատարվում են n անկախ փորձեր $A_1, A_2, \ldots, A_s$ անհամատեղելի պատահարների նկատմամբ, որոնց հավանականությունները յուրաքանչյուր փորձում հավասար են համապատասխանաբար $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = 1\right)$։ Այդ դեպքում, ինչպես հայտնի է, հավանականությունը, որ n փորձերի ընթացքում A_1 պատահարը տեղի կունենա m_1 անգամ, A_2 պատահարը՝ m_2 անգամ, ..., A_s պատահարը՝ m_s անգամ $\left(\sum\limits_{i=1}^{s} m_i = n\right)$, որոշվում է $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \ldots m_s!}\, p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_s^{m_s}$ առնչությամբ։

Այս առնչությամբ որոշվող հավանականությունների բաշխումը հայտնի է հավանականությունների տեսության մեջ որպես մուլտինոմիալ բաշխում։

Ներկա հոդվածում դիտարկված է հավանականությունների մուլտինոմիալ բաշխման ասիմպտոտիկ վարքը $n, p_1, p_2, \ldots, p_s$ մեծությունների միջև տարբեր առնչությունների առկայության դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. А. Козуляев*, Асимптотический анализ одной основной формулы теории вероятностей, Ученые записки Моск. Университета, 15 (1939), 179—182. [2] *Ю. В. Прохоров*, Асимптотическое поведение биномиального распределения, Успехи математических наук, т. VIII, вып. 3 (55), 135—142. [3] *Б. В. Гнеденко*, Курс теории вероятностей, Гостехиздат, М.—Л., 1950.