

МАТЕМАТИКА

А. Л. Шагинян, действ. чл. АН Армянской ССР

Об аппроксимации в среднем гармоническими многочленами

(Представлено 12 X 1954)

1. Имеется значительное количество результатов по вопросу о весовых полиномиальных приближениях, а также по приближениям в среднем как в двумерных областях, так и на кривых линиях. В обзорной статье ⁽¹⁾ приведены решения некоторых задач такого рода, а также соответствующая библиография.

В настоящей заметке указывается путь перенесения упомянутых результатов на случай приближений гармоническими полиномами.

За исходное принимаем теорему о том, что гармоническую в замкнутой жордановой области $\bar{D}$ функцию можно равномерно аппроксимировать в $\bar{D}$ гармоническими полиномами.

2. Пусть Ω конечная область типа Каратеодори, т. е. граница области Ω совпадает с границей бесконечной области, содержащей точку $z = \infty$. Как известно, для такой области Ω можно построить последовательность жордановых областей

$$\Omega^{(1)} \supset \Omega^{(2)} \supset \dots \supset \Omega^{(n)} \dots \supset \Omega,$$

таких, что $\{\Omega^{(n)}\}$ сходится к Ω как к ядру.

Обозначим через $u(z)$ ($z = x + iy$) гармоническую и ограниченную в Ω функцию

$$|u(z)| < c.$$

Отобразим конформно $\Omega^{(n)}$ в Ω функцией

$$z = \varphi_n(t)$$

так, чтобы

$$\varphi_n(t_0) = t,$$

$$\varphi_n'(t_0) > 0.$$

Из сходимости $\{\Omega^{(n)}\}$ к ядру Ω следует, что равномерно в $\Omega' \subset \Omega$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) &= t \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n'(t) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из ограниченности $u(z)$ и соотношений (1) следует:

Лемма. Если $u(z)$ ограниченная и гармоническая в конечной области Ω типа Каратеодори, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} |u[\varphi_n(z)] - u(z)|^p d\sigma = 0, p > 0. \quad (2)$$

В этой лемме функции $u[\varphi_n(z)]$, гармонические в замкнутой области $\bar{\Omega}$, очевидно можно заменить гармоническими многочленами $\{H_n(x, y)\}$. Приходим к утверждению, что *в любой конечной области Ω типа Каратеодори ограниченные гармонические функции аппроксимируемы в среднем гармоническими многочленами.*

3. Переходя к основной цели нашей заметки, ограничимся одной определенной задачей. Исследуем задачи об аппроксимации в среднем в области типа „луночки“, т. е. в области, топологически эквивалентной области, ограниченной двумя соприкасающимися окружностями.

Пусть C_1 есть окружность $|z - 1| = 1$, C_0 произвольная замкнутая кривая Жордана внутри C_1 , с единственной точкой соприкасания с C_1 в $z = 0$. Ω — область, ограниченная кривыми C_1 и C_0 . Сначала допустим, что окружность $|z| = \rho$ пересекается с C_1 и C_0 лишь в двух точках.

Ставится задача о приближении в среднем гармоническими полиномами функции $u(z)$, гармонической и ограниченной в Ω .

Преобразованием $t = \sqrt{z - z_0}$, где z_0 — какая-либо точка внутри C_0 , переводим Ω в область Ω^* , принадлежащую, очевидно, классу Каратеодори. При этом функция $u(z)$ переходит в функцию $u(z_0 + t^2)$, которую в Ω^* можно аппроксимировать в среднем гармоническими на t -плоскости полиномами $\{H_n^*(t)\}$ так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega^*} |u(z_0 + t^2) - H_n^*(t)|^p d\sigma^* = 0.$$

Перейдя обратно на z -плоскость, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} |u(z) - H_n(z)|^p \frac{d\sigma}{4|z - z_0|} = 0.$$

Но множитель $\frac{1}{|z - z_0|}$ ограничен и сверху и снизу, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} |u(z) - H_n(z)|^p d\sigma = 0. \quad (3)$$

В этом равенстве $H_n(z)$ есть линейная комбинация функции

$$r^{k/2} \cos \frac{k\varphi}{2} \quad \text{и} \quad r^{k/2} \sin \frac{k\varphi}{2},$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Из (3) следует, что задача об аппроксимации $u(z)$ гармоническими полиномами $\{P_n(x, y)\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u(z) - P_n(x, y)|^p d\sigma = 0 \quad (4)$$

сводится к задаче об аппроксимации в среднем функций

$$\left\{ r^{k/2} \cos \frac{k\varphi}{2} \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ r^{k/2} \sin \frac{k\varphi}{2} \right\}.$$

Но эти функции являются соответственно вещественной и мнимой частью функций $(z - z_0)^{k/2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Задача об аппроксимации этих последних комплексными полиномами разрешена ^(2,3). Допустим наша область Ω такова, что в ней имеет место полнота относительно аналитических функций аргумента z . Тогда для $(z - z_0)^{k/2}$ можно подобрать комплексные полиномы $\{T_n(z)\}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(z - z_0)^{k/2} - T_n(z)|^p d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| r^{k/2} \cos \frac{k\varphi}{2} - P_n(x, y) \right|^p d\sigma = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| r^{k/2} \sin \frac{k\varphi}{2} - Q_n(x, y) \right|^p d\sigma = 0,$$

где P_n и Q_n гармонические полиномы:

$$P_n = \operatorname{Re} T_n(z),$$

$$Q_n = \operatorname{Im} T_n(z).$$

Тем самым доказано, что ограниченную и гармоническую в Ω функцию можно аппроксимировать в среднем гармоническими полиномами, если в этой области имеет место полнота полиномов от z .

Эта последняя задача решена для широкого класса областей, в частности и для Ω , при аппроксимации средними квадратичными ^(2,3).

В статье (4) мы показали, что необходимые и достаточные условия полноты полиномов от z в классе Ω_p при любом $p > 0$ те же, что и для $p = 3$. Пользуясь результатами этой статьи, доказываем следующую теорему.

Теорема 1. Если $T(\rho)$ линейная мера дуг, отсекаемых областью Ω на $|z| = \rho$ и

$$T(\rho) = e^{-\theta(\rho)},$$

то ограниченные и гармонические в Ω функции аппроксимируемы в среднем любого порядка p гармоническими полиномами, при условиях:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad \theta(\rho t) &> \delta \cdot \lg \frac{1}{t} \cdot \theta(\rho), \\ \text{при некотором } \delta > 0, \text{ начиная с достаточно малых} \\ \rho \text{ и } t \leq t_0 < 1; \\ 2. \quad \theta(\rho t) &> q \cdot \theta(\rho), \\ \text{при } t \leq 1, \text{ некотором } q > 0 \text{ и } \rho \leq \rho_0; \\ 3. \quad \int_0^\infty \theta(t) dt &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В частности условия (9) выполняются при

$$\theta(\rho) = \frac{1}{\rho \lg \frac{1}{\rho} \cdot \lg_2 \frac{1}{\rho} \cdots \left(\lg_p \frac{1}{\rho} \right)^{1+\varepsilon}},$$

где $\varepsilon > 0$ и $\lg_p x = \lg(\lg_{p-1} x)$.

В Ω ограниченные гармонические функции аппроксимируемы средними порядка $p > 0$ и при условиях, указанных М. М. Джрбашяном (3) для полноты комплексных полиномов в классе Ω_2 аналитических в Ω функций*, т. е. имеет место:

Теорема 2. Если

$$T(\rho) = e^{-\theta(\rho)}$$

и $\theta(\rho)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{aligned} \text{а) монотонно } \frac{\rho \theta'(\rho)}{\theta(\rho)} &\downarrow -\infty \text{ при } \rho \rightarrow 0, \\ \text{б) } \int_0^\infty \theta(t) dt &= \infty, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

* Класс Ω_2 определен как класс функций $f(z)$, голоморфных в Ω и удовлетворяющих условию

$$\iint_{\Omega} |f(z)|^2 d\sigma < \infty.$$

то любая ограниченная и гармоническая в Ω функция аппроксимируема в среднем степени $p > 0$ в Ω гармоническими полиномами $\{H_n(x, y)\}$, т. е.

$$\inf_{\{H_n\}} \int_{\Omega} |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0.$$

Построениями, аналогичными тем, что имеются в статье (4), доказываем существование областей, для которых выполняются условия теоремы 1, т. е. в них имеет место равенство (4), однако в этих областях условие (a) теоремы 2 не выполняется. Доказывается также, что построенные области нельзя охватить более широкой областью типа Ω , удовлетворяющей условиям теоремы 2. Тем самым доказано, что условия теоремы 1 характеризуют определенный класс областей, в которых имеет место полнота в ранее указанном ограниченном смысле и, однако, теоремой 2 вопрос о полноте в них неразрешим.

4. Наконец, доказываем, что достаточные условия, приведенные в условиях теорем 1—2, вообще говоря, также необходимы.

Пусть Ω область, описанная в § 1, и для $u(x, y)$ гармонической и ограниченной в Ω

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_{\Omega} |H_n(x, y)|^p d\sigma < \text{const},$$

где const не зависит от H_n .

Обозначим через z_0 произвольную точку внутри Ω , а через δ расстояние точки z_0 до границы Ω .

Тогда

$$\pi \cdot \delta^2 |H_n(z_0)|^p \leq \int_{|z - z_0| < \delta} |H_n(x, y)|^p d\sigma < \text{const},$$

т. е.

$$|H_n(z_0)| < \left[\frac{c}{\pi \delta^2} \right]^{1/p}, \quad n=1, 2, \dots$$

Пользуясь этой оценкой и известными теоремами искажения Альфорса, доказываем, что:

Теорема. Если кривая C_0 такова, что она соприкасается с C_1 в начале координат, а $|z| = \rho$ пересекает каждую из кривых C_0 и C_1 в одной точке, то из условий

$$\int_0^{\infty} \theta(\rho) d\rho < \infty$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0$$

следует нормальность полиномов $\{H_n\}$ внутри окружности C_1 , а следовательно, также регулярность $u(x, y)$ в этой области.

Это показывает, что при ограничении, накладываемом на область Ω , аппроксимация в среднем, вообще говоря, невозможна.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Լ. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Միջին իմաստով հարմոնիկ բազմանդամային մոտարկումների մասին

Հետևիք է տեսնել, որ

1. Կարաթեոդորու տիպի* տիրույթներում Ֆարեյ—Մարկուսենիչի բերեմբր ճիշտ է նաև սահմանափակ հարմոնիկ ֆունկցիաների դեպքում:

Այսինքն՝ եթե $\{\Omega^{(n)}\}$ միմյանց մեջ ներդրված տիրույթների մի հաջորդականություն է, որը ծածկում է տվյալ Ω տիրույթը և ձգտում է դեպի վերջինս որպես կորիզի, այդ դեպքում նշանակելով

$$z = \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t_0) = t_0, \quad \varphi'_n(t_0) > 0,$$

Ω_n -ը Ω -ի մեջ կոնֆորմ կերպով արտապատկերող ֆունկցիան, կունենանք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u[\varphi_n(t)] - u(t)|^p d\sigma = 0,$$

որ $p > 0$ կամայական մի թիվ է, իսկ $u(z)$ հարմոնիկ է և սահմանափակ:

Դիցուք C_1 -ը $|z - 1| = 1$ շրջանագիծն է, իսկ C_0 -ն նրա ներսը գտնվող մի ժողովանյան փակ գիծ, որը շոշափում է C_1 -ին $z = 1$ կետում:

Պարզուրյան համար ընդունենք, որ $|z| = \rho$ շրջանագիծը $z = 1$ կետի շրջապատում հատում է C_0 գծին երկու կետում: Նշանակենք $T(\rho)$ -ով $|z| = \rho$ շրջանագծի այն աղեղների գումարը, որոնք առաջանում են C_1 և C_0 գծերով սահմանափակված տիրույթի հետ հատվելիս:

Ապացուցվում են հետևյալ թեորեմները

2. Եթե $T(\rho) = C^{-\theta(\rho)}$ և $\theta(\rho)$ -ն բավարարում է $1^\circ - 3^\circ$ պայմաններին:

$$1^\circ \quad \theta(rt) > \delta \cdot \lg \frac{1}{t} \theta(r), \quad \text{երբ } t < 1,$$

$$2^\circ \quad \theta(rt) > q \cdot \theta(r), \quad \text{երբ } t \leq 1,$$

$$3^\circ \quad \int_0^2 \theta(t) dt = \infty, \quad \delta > 0$$

*Կարաթեոդորու տիպի տիրույթների մասին տես օր. А. И. Маркушевич, Теория аналит. функций, М.—Л., 1950.

ապա Ω սիրույրում յուրամանջուր $u(x, y)$ հարմոնիկ և սահմանափակ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն այնպիսի $\{H_n(x, y)\}$ հարմոնիկ բազմանդամներ, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0. \quad (*)$$

3. Եթե $\frac{r\theta'(r)}{\theta(r)}$ մեծությունը, r -ը դեպի զերոն նվազելիս, մոտոսոն ձգում է $-\infty$ -ի և

$$\int_0^a \theta(t) dt = \infty,$$

ապա դարձյալ սեղի ունի $(*)$ -ն:

Այս թեորեմը հոլոմորֆ ֆունկցիաները միջին քառակուսիներով մոտարկելու դեպքում ապացուցել է *Մ. Մ. Ջրրաշյանը* (3) ; (4) -րդ հոդվածում ցույց է տրված, որ այդ թեորեմը ճիշտ է նաև $p > 0$ կարգի միջիններով մոտարկելիս: Իսկ այստեղ այդ բանը հաստատվում է նաև հարմոնիկ մոտարկումների դեպքում:

Նույն եղանակով, ինչ որ բերված է (4) -ում մենք ցույց ենք տալիս, որ 2-րդ թեորեմի միջոցով կարելի է լուծել միջին մոտարկման խնդիրը այնպիսի տիրույթների համար, որոնց համար 6-րդ թեորեմը կիրառելի չէ $\frac{r\theta'(r)}{\theta(r)}$ -ի մասին բերված պայմանը

խախտվելու պատճառով:

Կառուցված են այնպիսի տիրույթներ, որոնք ոչ միայն իրենք չեն բավարարում այդ մոնոտոնության պայմանին, այլև նրանց չի կարելի ծածկել նույն Ω տիպի տիրույթով, որը բավարարեր նույն մոնոտոնության պայմանին:

Վերջապես ապացուցվում է հսկադարձ տիպի մի թեորեմ:

4. Եթե Ω -ը վեր նկարագրված սիրույրն է և

$$\int_0^a \theta(t) dt < \infty,$$

ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega} |u(x, y) - H_n(x, y)|^p d\sigma = 0$$

հավասարությունից բխում է $\{H_n\}$ բնականի նորմալությունը C եղանակով ներք:

Պարզ է, որ 4-րդ թեորեմից հետևում է հարմոնիկ բազմանդամների ոչ լրիվ լինելը Ω -ում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ *С. Н. Мергелян*, О полноте аналитических функций УМН, т. VIII, вып. 4(56), (1953). ² *А. Л. Шагинян*, О полноте семейств аналитических функций, Сообщения Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 1 (1947). ³ *М. М. Джрбашян*, Метрические теоремы о полноте и о представимости аналитических функций. докт. диссертация, Ереван, 1948. ⁴ *А. Л. Шагинян*, О приближении полиномами, Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., естеств. и техн. наук, 4, 1954.