ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XIX 1954 3

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, чл.-корресп. АН Армянской ССР

Об асимптотическом поведении функции типа Миттаг-Лефлера

(Представлено 23 IX 1954)

Рассмотрим целую функцию типа Миттаг-Лефлера.

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\ (\rho>0,\ -\infty<\mu<+\infty), \tag{1}$$

Очевидно, что при фиксированном $\rho>0$ функция $E_\rho(z;\ \mu)$, при любом конечном значении параметра μ, имеет порядок ρ и тип 1.

Функция $E_\rho(z;\ \mu)$ при $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, $\mu>0$ играет важную роль при построении теории обобщенных интегральных преобразований в комплексной области ([1,2]). При этом существенны некоторые асимптотические свойства функции $E_\rho(z;\ \mu)$ ([1,3]).

Пусть число β определяется из условий

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\pi, \quad \text{при} \quad \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1,\\ &\frac{\pi}{2\rho}<\beta<\frac{\pi}{\rho}, \quad \text{при} \quad \rho>1,\end{aligned} \tag{2}$$

а) при $\rho>\frac{1}{2}$, $|\arg z|\leqslant\beta$, когда $|z|\to\infty$,

$$E_\rho(z;\ \mu)=\rho z^{\rho(1-\mu)}e^{z^\rho}+O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{3}$$

б) при $\rho>\frac{1}{2}$, $|\arg z|\geqslant\beta$, когда $|z|\to\infty$,

$$E_\rho(z;\ \mu)=O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{4}$$

в) при $\rho=\frac{1}{2}$, $|\arg z|<\pi$, когда $|z|\to\infty$,

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)\sim\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}e^{z^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

Таким образом, как о поведении функции $E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)$ в замкнутой плоскости z, так и о порядке дополнительного члена при $|z|\to\infty$ формула (5) ничего не дает.

Но, как не трудно видеть, при частных значениях параметра μ, именно при $\mu=1$ и $\mu=2$, функция $E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)$ выражается через элементарные функции

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ 1)=\operatorname{ch}\sqrt{z}\ ,\ E_{\frac{1}{2}}(z;\ 2)=\frac{\operatorname{sh}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \tag{6}$$

В настоящей заметке устанавливается асимптотическая формула для функции $E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)$ при $\mu>0$, годная во всей плоскости z, причем указывается также порядок дополнительного члена.

Теорема. Если $\mu>0$, *то будем иметь:*

а) *при* $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$, *когда* $|z|\to\infty$,

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}+O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{7}$$

б) *при* $-\pi\leqslant\arg z\leqslant 0$, *когда* $|z|\to\infty$,

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{+i\pi(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}+O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{7'}$$

в) *при* $x\to+\infty$,

$$E_{\frac{1}{2}}(-x;\ \mu)=x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\cos\left[\sqrt{x}+\frac{\pi}{2}(1-\mu)\right]+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{7''}$$

Доказательство. Заметим, что утверждение в) теоремы просто следует из (7) или (7′), когда в них соответственно положить $z=xe^{i\pi}$ и $z=xe^{-i\pi}$ $(x>0)$.

Для любых $\varepsilon>0$ и $0<\alpha\leqslant\pi$ обозначим через $\gamma(\varepsilon,\ \alpha)$ кривую, состоящую из лучей $\arg z=\pm\alpha$, $|z|\geqslant\varepsilon$ и из дуги $|\arg z|\leqslant\alpha$ окружности $|z|=\varepsilon$, пробегаемую так, что полуось $\arg z=\pm\pi$ остается слева от $\gamma(\varepsilon,\ \alpha)$.

При любом $\varepsilon>0$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\pi$ во всей комплексной плоскости s имеет место интегральное представление [1]

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\ \alpha)}e^{u}u^{-s}du. \tag{8}$$

Легко видеть, что при $s>0$ представление (8) остается справедливым и при $\alpha=\frac{\pi}{2}$, поэтому имеем:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma\left(\varepsilon,\frac{\pi}{2}\right)}e^{u}u^{-s}du. \tag{9}$$

После замены переменной $t=u^2$ в силу произвольности $\varepsilon>0$ представление (9) примет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\,\pi)} e^{t^{\frac{1}{2}}}t^{-\frac{s+1}{2}}dt, \quad (s>0;\ \varepsilon>0). \tag{10}$$

Из (1) и (10) при $|z|<\varepsilon$ получим:

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\,\pi)}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}dt. \tag{11}$$

Заметив, что при $1<|z|<\varepsilon$, $|\arg z|<\pi$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(\varepsilon,\,\pi)-\gamma(1,\,\pi)}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}\,dt=z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}e^{z^{\frac{1}{2}}}, \tag{12}$$

из (11) в силу произвольности $\varepsilon>0$ получим представление

$$E_{\frac{1}{2}}(z,\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}e^{z^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma(1,\,\pi)}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}dt, \tag{13}$$

справедливое при $\mu>0$, $|z|>1$, $|\arg z|<\pi$.

Заметим, что контур $\gamma(1,\ \pi)$ состоит из луча $\gamma^{(-)}(\arg t=-\pi$, $t\leqslant-1)$, окружности $K(|t|=1)$ и луча $\gamma^{(+)}(\arg t=\pi$, $t\leqslant-1)$, которые последовательно пробегаются так, что область $|t|>1$, $|\arg t|<\pi$ остается слева.

Докажем теперь, что при $\mu>0$, $|z|>1$, $|\arg z|<\pi$ имеет место тождество

$$0=z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma(1,\,\pi)}\frac{e^{-t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}dt. \tag{14}$$

Обозначим через $\gamma_R(1,\ \pi)$ $(R>1)$ часть контура $\gamma(1,\ \pi)$, лежащую в круге $|t|\leqslant R$. По теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R(1,\,\pi)}\frac{e^{-t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R}\frac{e^{-t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}dt=-z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}, \tag{15}$$

при $|\arg z|<\pi$, $1<|z|<R$.

Для установления тождества (14) очевидно достаточно показать, что при $R\to\infty$, второй интеграл слева в (15) стремится к нулю.

Это действительно так в силу следующей оценки

$$\left|\int\limits_{|t|=R}\frac{e^{-t^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{t-z}\,dt\right|\leqslant\frac{R}{R-|z|}R^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-R^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi=$$

$$=\frac{2R}{R-|z|}R^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\int_0^{\pi}e^{-R^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}}d\varphi=\frac{2R}{R-|z|}R^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\int_0^{\pi}e^{-R^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}}d\varphi<$$

$$<\frac{2R}{R-|z|}R^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\int_0^{\pi}e^{-\frac{1}{\pi}R^{\frac{1}{2}}\varphi}d\varphi<\frac{2\pi R}{R-|z|}R^{-\frac{\mu}{2}},\ (\mu>0).$$

Умножим обе части тождества (14) на $\frac{1}{2}e^{\pm i\pi(1-\mu)}$ и сложим с формулой (13), тогда получим представления

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{\pm i\pi(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma(1,\ \pi)}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}+e^{\pm i\pi(1-\mu)}e^{-t^{\frac{1}{2}}}}{t-z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt, \tag{16}$$

справедливые в области $|\arg z|<\pi$, $|z|>1$.

Обозначим

$$\Phi_1^{(\pm)}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\pm)}}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-t^{\frac{1}{2}}}}{t-z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt, \tag{17}$$

$$\psi_1(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{K}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-t^{\frac{1}{2}}}}{t-z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt, \tag{18}$$

$$\Phi_2^{(\pm)}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\pm)}}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}+e^{i\pi(1-\mu)}e^{-t^{\frac{1}{2}}}}{t-z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt, \tag{17'}$$

$$\psi_2(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_{K}\frac{e^{t^{\frac{1}{2}}}+e^{i\pi(1-\mu)}e^{-t^{\frac{1}{2}}}}{t-z}t^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dt, \tag{18'}$$

тогда представления (16) примут вид

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left\{e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right\}+$$

$$+\Phi_1^{(+)}(z)+\Phi_1^{(-)}(z)+\psi_1(z) \tag{19}$$

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\ \mu)=\frac{1}{2}z^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\left[e^{z^{\frac{1}{2}}}+e^{i\pi(2-\mu)}e^{-z^{\frac{1}{2}}}\right]+$$

$$+\Phi_2^{(+)}(z)+\Phi_2^{(-)}(z)+\psi_2(z). \tag{19'}$$

Далее, имеем:

$$\Phi_1^{(+)}(z)+\Phi_1^{(-)}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_1^\infty\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\left[e^{i\sqrt{x}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{-i\sqrt{x}}\right]}{x+z}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dx-$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_1^\infty\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\left[e^{-i\sqrt{x}}+e^{-i\pi(1-\mu)}e^{i\sqrt{x}}\right]}{x+z}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\,dx=$$

$$=\frac{\sin\pi\mu}{2\pi}\int_1^\infty\frac{e^{i\left[\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}(1-\mu)\right]}}{x+z}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\,dx. \tag{20}$$

$$\Phi_2^{(+)}(z)+\Phi_2^{(-)}(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_1^\infty\frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\left[e^{i\sqrt{x}}+e^{i\pi(1-\mu)}e^{-i\sqrt{x}}\right]}{x+z}\times$$

$$\times x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dx-\frac{1}{4\pi i}\int_1^\infty\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}\left[e^{-i\sqrt{x}}+e^{i\pi(1-\mu)}e^{i\sqrt{x}}\right]}{x+z}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dx=$$

$$=\frac{\sin\pi\mu}{2\pi}\int_1^\infty\frac{e^{-i\left[\sqrt{x}-\frac{\pi}{2}(1-\mu)\right]}}{x+z}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}dx. \tag{20'}$$

Заметим, кроме того, что функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ голоморфны везде в области $|z|>1$ и при $|z|\to\infty$ имеем

$$\psi_k(z)=O\left(\frac{1}{z}\right),\quad (k=1,\ 2). \tag{21}$$

Формулой (19) мы воспользуемся для установления утверждения а), а формулой (19′)—для установления утверждения б) теоремы.

Докажем теперь, что при $|z|\to\infty$

$$\int_1^\infty\frac{e^{i\sqrt{x}}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{x+z}\,dx=O\left(\frac{1}{z}\right),\ \text{если}\ O\leqslant\arg z\leqslant\pi, \tag{22}$$

и

$$\int_1^\infty\frac{e^{-i\sqrt{x}}x^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{x+z}\,dx=O\left(\frac{1}{z}\right),\ \text{если}\ -\pi\leqslant\arg z\leqslant O. \tag{22'}$$

Если формулы (22) и (22′) будут установлены, то очевидно, что утверждение а) теоремы будет следовать из (19), (20), (21) и (22), а утверждение б) будет следовать из (19′), (20′), (20) и (22′).

Для доказательства (22) рассмотрим функцию

$$\frac{e^{i\sqrt{w}}}{w+z} w^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \tag{23}$$

в области $0 \leqslant \arg w \leqslant \frac{\pi}{2}$, где z фиксировано и $0 \leqslant \arg z < \pi$. Причем берется та ветвь функции (23), которая на положительной вещественной оси плоскости $w = u + iv$ принимает значения

$$\frac{e^{i\sqrt{u}}}{u+z} u^{\frac{1}{2}(1-\mu)}. \tag{23'}$$

Обозначим через $L(R)$, $(R > 1)$ пробегаемый в положительном направлении контур, состоящий из отрезка (iR, i), дуги окружности $C_1 \left(|w| = 1,\ 0 \leqslant \arg w \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$, отрезка $(1, R)$ и дуги окружности $C_R \left(|w| = R,\ 0 \leqslant \arg w \leqslant \frac{\pi}{2} \right)$.

Так как $0 \leqslant \arg z < \pi$, то при любом $R > 1$ имеем:

$$\int\limits_{L(R)} \frac{e^{i\sqrt{w}}}{w+z} w^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\, dw = 0. \tag{24}$$

Формула (24) в развернутом виде принимает вид:

$$\int\limits_1^R \frac{e^{i\sqrt{u}}\, u^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{u+z} du + \int\limits_{C_R} \frac{e^{i\sqrt{w}}\, w^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{w+z} dw -$$

$$-ie^{i\frac{\pi}{4}(1-\mu)} \int\limits_1^R \frac{e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{v}}\, v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{iv+z} dv + \int\limits_{C_1} \frac{e^{i\sqrt{w}}\, w^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{w+z} dw = 0. \tag{24'}$$

Если $R > |z|$, то имеем оценку

$$\left| \int\limits_{C_R} \frac{e^{i\sqrt{w}}\, w^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{w+z} dw \right| \leqslant \frac{R}{R-|z|} R^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}} d\varphi <$$

$$< \frac{R}{R-|z|} R^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R^{\frac{1}{2}}}{\pi}\varphi} d\varphi < \frac{\pi R}{R-|z|} R^{-\frac{\mu}{2}}. \tag{25}$$

Но по условию $\mu > 0$, поэтому после предельного перехода, когда $R \to +\infty$, из (24') и (25) получим формулу

$$\int\limits_1^\infty \frac{e^{i\sqrt{u}}\, u^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{u+z} du = ie^{i\frac{\pi}{4}(1-\mu)} \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{v}}\, v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{iv+z} dv +$$

$$
+\int\limits_{C_1} \frac{e^{i\sqrt{w}}\, w^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{w+z}\, dw, \tag{24''}
$$

справедливую при $0 \leqslant \arg z < \pi$.

Но первый интеграл справа в (24″) абсолютно сходится во всей замкнутой полуплоскости $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, так как тогда

$$
\left| \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{v}}\, v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{iv+z}\, dv \right| \leqslant \int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{v}{2}}}\, v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}}{\sqrt{(Re z)^2+(v+I_m z)^2}}\, dv \leqslant
$$

$$
\leqslant \frac{1}{|z|} \int\limits_1^{\infty} e^{-\sqrt{\frac{v}{2}}}\, v^{\frac{1}{2}(1-\mu)}\, dv = \frac{A_1}{|z|}. \tag{26}
$$

Что касается второго интеграла справа в (24″), то она—голоморфная функция везде вне дуги C_1 и очевидно, что при $|z| \to \infty$ эта функция имеет порядок $\frac{1}{|z|}$.

Из (24″) и из сделанных выше замечаний следует, что интеграл (22) представляет функцию, голоморфную везде в области $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, и при $|z| \to \infty$ имеет порядок $\frac{1}{|z|}$. Таким образом, утверждение (22) доказано.

Что касается утверждения (22′), то очевидно оно является простым следствием из (22).

Таким образом, теорема полностью доказана.

Следует отметить, что асимптотическая формула (7), установленная при $\mu > 0$, представляет интерес только при $\frac{1}{2}(\mu-1) < 1$, то-есть при $\mu < 3$.

Аналогичное замечание относится и к формуле (3), которая представляет интерес при $\rho(\mu-1) < 1$, то-есть при $\mu < 1 + \frac{1}{\rho}$.

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիայի ասիմպտոտական վարքի մասին

Ներկա հոդվածում

$$
E_\rho(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}
$$

շարքերով որոշվող Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիայի համար ապացուցվում է հետևյալ թեորեման։

Եթե $\mu > 0$, ապա

ա) Երբ $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, $|z| \to \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\, \mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \left\{ e^{z^{\frac{1}{2}}} + e^{-i\pi(1-\mu)} e^{-z^{\frac{1}{2}}} \right\} + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

բ) Երբ $-\pi \leqslant \arg z \leqslant 0$ և $|z| \to \infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(z;\, \mu) = \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \left\{ e^{z^{\frac{1}{2}}} + e^{i\pi(1-\mu)} e^{-z^{\frac{1}{2}}} \right\} + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

գ) Երբ $x \to +\infty$

$$E_{\frac{1}{2}}(-x;\, \mu) = x^{\frac{1}{2}(1-\mu)} \cos\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}(1-\mu)\right) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Изв. АН СССР, серия мат., т. 18. № 5, 1954. [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, 95, № 6, 1954, [3] *Фрай* и *Гюгенс*, Duke Math. Journ., Vol. 9, 1942. [4] См. напр. *А. И. Маркушевич*, Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.