

МЕХАНИКА

Б. Л. Абрамян

К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра

(Представлено Н. Х. Арутюняном 19 VI 1954)

Осесимметричной деформацией тел вращения занимались многие исследователи (¹⁻⁷ и др.). В их работах в основном рассматривались частные случаи нагружения. В тех же работах, где рассматривались случаи более сложного нагружения, решения даются в приближенном виде.

Решение задачи осесимметричной деформации тел вращения сводится (⁸) к отысканию одной функции напряжений $\Phi(r, z)$ (r —направление радиуса, z —направление оси вращения), которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (1)$$

а на поверхности тела задается законом распределения напряжений.

Ниже приводится точное решение этой задачи для круглого цилиндра при произвольном нагружении.

Бигармоническую функцию напряжений для круглого сплошного цилиндра ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & z(Ar^2 + Bz^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[E_k I_0(\lambda_k r) + \right. \\ & \left. + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \right] \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + \\ & + B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r), \end{aligned} \quad (2)$$

где $J_i(x)$ —функция Бесселя i -го порядка, первого рода с действительным аргументом. $I_i(x)$ —функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента (⁹), μ_k —корни уравнения

$$J_1(xR) = 0, \quad (3)$$

$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, l —длина, R —радиус цилиндра.

Пусть нагрузка на поверхности цилиндра распределена по закону $\sigma_z(r, 0)=f_1(r)$, $\sigma_z(r, l)=f_2(r)$, $\tau_{zr}(r, 0)=f_3(r)$, $\tau_{zr}(r, l)=f_4(r)$ ($0 \leq r \leq R$) (4)

$$\sigma_r(R, z)=f_5(z), \quad \tau_{zr}(R, z)=f_6(z), \quad (0 \leq z \leq l) \quad (5)$$

где функции $\{f_i\}$ — кусочно-непрерывны и имеют ограниченное изменение в соответствующих интервалах.

При таких предположениях функции $f_1(r)$ — $f_4(r)$ в точках непрерывности могут быть представлены в виде рядов по бесселевым функциям Фурье-Дини ⁽¹⁰⁾, а функции $f_5(z)$ и $f_6(z)$ — в виде рядов Фурье.

Пользуясь известными формулами, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_0(\mu_k r), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=l} &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_0(\mu_k r), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=0} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(\mu_k r), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Big|_{z=l} &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k J_1(\mu_k r), \end{aligned} \right\} \quad (0 < r < R) \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=R} &= \frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos \lambda_k z, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[(1-\nu) \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \Big|_{r=R} &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin \lambda_k z, \end{aligned} \right\} \quad (0 < z < l) \quad (7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, ν — коэффициент Пуассона.

Кроме этих условий, так как действующая нагрузка распределена симметрично относительно оси, имеем также:

$$\tau_{zr}(0, z) = 0 \quad (8)$$

и

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_\varphi(0, z). \quad (9)$$

Удовлетворив условиям (6)—(9), для определения неизвестных коэффициентов получим соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ [E_k + 2(2-\nu)G_k] I_1(\lambda_k R) + \\ & + G_k \lambda_k R I_2(\lambda_k R) \} = a_0 - 4(2-\nu)A - 6(1-\nu)B, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k R) + \\
& + G_k \lambda_k R I_0(\lambda_k R) \} - \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} + \frac{4\mu_p^2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^4 G_k I_1(\lambda_k R)}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2} = \\
& = a_p + \mu_p^3 [A_p - D_p(1-2\nu)], \tag{11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (-1)^k \{ [E_k + 2(2-\nu) G_k] I_1(\lambda_k R) + \\
& + G_k \lambda_k R I_2(\lambda_k R) \} = b_0 - 4(2-\nu)A - 6(1-\nu)B, \tag{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 (-1)^k \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k R) + \\
& + G_k \lambda_k R I_0(\lambda_k R) \} - \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} + \frac{4\mu_p^2}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^4 (-1)^k G_k I_1(\lambda_k R)}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2} = \\
& = b_p + \mu_p^3 \{ [A_p - D_p(1-2\nu)] \operatorname{ch} \mu_p l + \\
& + [B_p - C_p(1-2\nu)] \operatorname{sh} \mu_p l + D_p \mu_p l \operatorname{sh} \mu_p l + C_p \mu_p l \operatorname{ch} \mu_p l \}, \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\mu_k^3 (B_k + 2\nu C_k) = c_k, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_k^3 \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k l + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \mu_k l + \\
& + C_k \mu_k l \operatorname{sh} \mu_k l + D_k \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k l \} = d_k, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\lambda_k^3 \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k R) + G_k \lambda_k R I_0(\lambda_k R) \} = q_k, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k R) \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k l + \\
& + (B_k + 2\nu C_k) (\operatorname{ch} \mu_k l - 1) + C_k \mu_k l \operatorname{sh} \mu_k l + \\
& + D_k \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k l \} = \frac{g_0}{2} + 2(1-2\nu)A - 6\nu B, \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^p \frac{4\lambda_p^2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4 J_0(\mu_k R)}{(\mu_k^2 + \lambda_p^2)^2} (C_k \operatorname{ch} \mu_k l + D_k \operatorname{sh} \mu_k l) - \\
& - \frac{4\lambda_p^2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^4 J_0(\mu_k R)}{(\mu_k^2 + \lambda_p^2)^2} C_k =
\end{aligned}$$

$$= g_p + \lambda_p^3 \left\{ [E_p + (1-2\nu)G_p] I_0(\lambda_p R) + G_p \lambda_p R I_1(\lambda_p R) - \right. \\ \left. - E_p \frac{I_1(\lambda_p R)}{\lambda_p R} \right\} + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k J_0(\mu_k R)}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} [c_k + (-1)^{p+1} d_k]. \quad (18)$$

При этом использованы разложения:

$$I_0(\lambda_k r) = 2 \frac{I_1(\lambda_k R)}{(\lambda_k R)} + \frac{2\lambda_k I_1(\lambda_k R)}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} \frac{J_0(\mu_p r)}{J_0(\mu_p R)}, \quad (0 < r \leq R) \quad (19)$$

$$\lambda_k r I_1(\lambda_k r) = 2I_2(\lambda_k R) + \\ + 2\lambda_k^2 I_0(\lambda_k R) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} \frac{J_0(\mu_p r)}{J_0(\mu_p R)} - \\ - \frac{4\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)}{R} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_p^2)^2} \frac{J_0(\mu_p r)}{J_0(\mu_p R)}, \quad (0 < r \leq R) \quad (20)$$

$$\operatorname{ch} \mu_k z = \frac{\operatorname{sh} \mu_k l}{\mu_k l} + \frac{2\mu_k \operatorname{sh} \mu_k l}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{\lambda_p^2 + \mu_k^2}, \quad (0 \leq z \leq l) \quad (21)$$

$$\operatorname{sh} \mu_k z = \frac{\operatorname{ch} \mu_k l - 1}{\mu_k l} + \frac{2\mu_k \operatorname{ch} \mu_k l}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} - \\ - \frac{2\mu_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_p z}{\mu_k^2 + \lambda_p^2}, \quad (0 \leq z \leq l) \quad (22)$$

$$\mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z = \frac{\mu_k l \operatorname{sh} \mu_k l - \operatorname{ch} \mu_k l + 1}{\mu_k l} - \\ - \frac{2\mu_k}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_p z}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} + \frac{2\mu_k}{l} (\operatorname{ch} \lambda_k l + \mu_k l \operatorname{sh} \mu_k l) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} - \\ - \frac{4\mu_k^3 \operatorname{ch} \mu_k l}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{(\mu_k^2 + \lambda_p^2)^2} + \frac{4\mu_k^3}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_p z}{(\mu_k^2 + \lambda_p^2)^2}, \quad (0 \leq z \leq l) \quad (23)$$

$$\mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z = \frac{\mu_k l \operatorname{ch} \mu_k l - \operatorname{sh} \mu_k l}{\mu_k l} +$$

$$+ \frac{2\mu_k}{l} (\operatorname{sh} \mu_k l + \mu_k l \operatorname{ch} \mu_k l) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} -$$

$$-\frac{4\mu_k^3 \operatorname{sh} \mu_k l}{l} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \lambda_p z}{(\mu_k^2 + \lambda_p^2)^2}. \quad (0 \leq z \leq l) \quad (24)$$

Из соотношений (10)–(18) коэффициенты A и B определяются следующим образом:

$$A = \frac{\nu}{2(1+\nu)} \left[a_0 - \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \right] - \frac{1-\nu}{2(1+\nu)} \left[\frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R)}{\mu_k l} (c_k - d_k) \right], \quad (25)$$

$$B = \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)} \left[a_0 - \frac{2}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \right] + \frac{2-\nu}{3(1+\nu)} \left[\frac{g_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_k R)}{\mu_k l} (c_k - d_k) \right]. \quad (26)$$

Исключив из соотношений (10)–(18) коэффициенты E_k , A_k и B_k и введя новые неизвестные

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \frac{\lambda_k^4 I_1(\lambda_k R) G_k}{\varphi_k}, \\ Y_k &= \frac{\mu_k^4 R J_0(\mu_k R) (\operatorname{sh} \mu_k l - \mu_k l) \left(C_k + D_k \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{2} \right)}{\psi_k}, \\ Z_k &= \frac{\mu_k^4 R J_0(\mu_k R) (\operatorname{sh} \mu_k l + \mu_k l) \left(C_k + D_k \operatorname{cth} \frac{\mu_k l}{2} \right)}{\psi_k}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k &= \frac{x_k}{x_k + \frac{1+\nu}{(\lambda_k R)^2}}, \\ \psi_k &= \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{2} \left(1 - \frac{\mu_k l}{\operatorname{sh} \mu_k l} \right), \\ x_k &= \frac{I_0(\lambda_k R) I_2(\lambda_k R)}{I_1^2(\lambda_k R)} - 1 + \frac{2 I_2(\lambda_k R)}{\lambda_k R I_1(\lambda_k R)}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

получим две совокупности бесконечных систем линейных уравнений, причем в каждую совокупность входят две системы.

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{p\kappa} Y_{\kappa} + \alpha_p, & (p=1, 3, \dots) \\ Y_p &= \sum_{\kappa=1,3,\dots}^{\infty} b_{p\kappa} X_{\kappa} + \beta_p, & (p=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} X_p &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_{p\kappa} Z_{\kappa} + \alpha_p, & (p=2, 4, \dots) \\ Z_p &= \sum_{\kappa=2,4,\dots}^{\infty} b_{p\kappa} X_{\kappa} + \gamma_p, & (p=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} a_{p\kappa} &= \frac{4\lambda_p^2 \psi_{\kappa}}{R^2 \varphi_p \left[\kappa_p + \frac{2(1+\nu)}{(\lambda_p R)^2} \right]} \cdot \frac{\operatorname{sh} \mu_{\kappa} l (\operatorname{sh} \mu_{\kappa} l + \mu_{\kappa} l) \operatorname{cth} \frac{\mu_{\kappa} l}{2}}{(\operatorname{sh}^2 \mu_{\kappa} l - \mu_{\kappa}^2 l^2) (\mu_{\kappa}^2 + \lambda_p^2)^2}, \\ & \quad (p=1, 3, \dots; \quad \kappa=1, 2, \dots) \\ c_{p\kappa} &= \frac{4\lambda_p^2 \psi_{\kappa}}{R^2 \varphi_p \left[\kappa_p + \frac{2(1+\nu)}{(\lambda_p R)^2} \right]} \cdot \frac{\mu_{\kappa} \operatorname{sh} l (\operatorname{sh} \mu_{\kappa} l - \mu_{\kappa} l) \operatorname{th} \frac{\mu_{\kappa} l}{2}}{(\operatorname{sh}^2 \mu_{\kappa} l - \mu_{\kappa}^2 l^2) (\mu_{\kappa}^2 + \lambda_p^2)^2}, \\ & \quad (p=2, 4, \dots; \quad \kappa=1, 2, \dots) \\ b_{p\kappa} &= \frac{8\mu_p^3 \varphi_{\kappa}}{l \psi_p (\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2}, \quad (p=1, 2, \dots; \quad \kappa=1, 2, \dots) \\ \alpha_p &= \frac{l}{R \varphi_p \left[\kappa_p + \frac{2(1+\nu)}{(\lambda_p R)^2} \right]} \left\{ g_p + q_p \left[\frac{I_0(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p R)} - \frac{1}{\lambda_p R} \right] + \right. \\ & \quad + \frac{2}{l} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\mu_{\kappa} J_0(\mu_{\kappa} R)}{\mu_{\kappa}^2 + \lambda_p^2} \left[(c_{\kappa} + (-1)^{p+1} d_{\kappa}) \right] \Big\}, \quad (p=1, 2, \dots) \\ \beta_p &= \frac{\mu_p R J_0(\mu_p R)}{\psi_p} \left\{ b_p - a_p + (c_p + d_p) \operatorname{th} \frac{\mu_p l}{2} + \right. \\ & \quad + \frac{4}{R J_0(\mu_p R)} \sum_{\kappa=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_{\kappa} q_{\kappa}}{\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2} \Big\}, \quad (p=1, 2, \dots) \\ \gamma_p &= \frac{\mu_p R J_0(\mu_p R)}{\psi_p} \left\{ -(a_p + b_p) + (c_p - d_p) \operatorname{cth} \frac{\mu_p l}{2} + \right. \end{aligned} \quad (31)$$

$$+ \frac{4}{RJ_0(\mu_p R)} \sum_{\kappa=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_{\kappa} q_{\kappa}}{\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2} \}. \quad (p=1, 2, \dots)$$

Совокупности (29) и (30) можно написать в виде одной системы

$$F_m = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} F_n + B_m, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (32)$$

если ввести обозначения

$$\left. \begin{aligned} F_{3p} &= X_p, \quad F_{3p-1} = Y_p, \quad F_{3p-2} = Z_p, \\ B_{3p} &= \alpha_p, \quad B_{3p-1} = \beta_p, \quad B_{3p-2} = \gamma_p, \\ A_{3p, 3k} &= A_{3p-1, 3k-1} = A_{3p-1, 3k-2} = A_{3p-2, 3k-2} = \\ &= A_{3p-2, 3k-1} = 0, \quad (p=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots) \\ A_{3p, 3k-1} &= a_{pk}, \quad A_{3p, 3k-2} = 0, \quad (p=1, 3, \dots; k=1, 2, \dots) \\ A_{3p, 3k-2} &= c_{pk}, \quad A_{3p, 3k-1} = 0, \quad (p=2, 4, \dots; k=1, 2, \dots) \\ A_{3p-1, 3k} &= b_{pk}, \quad A_{3p-2, 3k} = 0, \quad (p=1, 2, \dots; k=1, 3, \dots) \\ A_{3p-1, 3k} &= 0, \quad A_{3p-2, 3k} = b_{pk}, \quad (p=1, 2, \dots; k=2, 4, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (p=1, 2, \dots) \quad (33)$$

Пользуясь обозначениями (31) и (33), легко показать, что система (32) регулярна.

Рассмотрим отдельно четыре случая:

а) Пусть $m=3p$ и p —нечетное, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{3p, n}| = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |A_{3p, 3\kappa-1}| = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |a_{p\kappa}| = \frac{x_p + \frac{1+\nu}{(\lambda_p R)^2}}{x_p + \frac{2(1+\nu)}{(\lambda_p R)^2}} < 1, \quad (34)$$

При этом использовано значение ряда, которое следует из (20) на основании теоремы Гобсона (¹⁰).

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_{\kappa}^2 + \lambda_p^2)^2} = \frac{R^2}{4\lambda_p^2} \left[\frac{I_0(\lambda_p R) I_2(\lambda_p R)}{I_1(\lambda_p R)} - 1 + \frac{2I_2(\lambda_p R)}{\lambda_p R I_1(\lambda_p R)} \right] = \frac{R^2}{4\lambda_p^2} x_p. \quad (35)$$

б) Пусть $m=3p$ и p —четное, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{3p, n}| = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |A_{3p, 3\kappa-2}| = \sum_{\kappa=1}^{\infty} |c_{p\kappa}| < \frac{x_p + \frac{1+\nu}{(\lambda_p R)^2}}{x_p + \frac{2(1+\nu)}{(\lambda_p R)^2}} < 1. \quad (36)$$

в) Пусть $m=3p-1$, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |A_{3p-1, n}| &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} |A_{3p-1, 3\kappa}| = \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} |b_{p\kappa}| = \\ &= \frac{8\mu_p^3}{l\psi_p} \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{x_{\kappa}}{\left[x_{\kappa} + \frac{1+\nu}{(\lambda_{\kappa}R)^2} \right] (\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2} < 1. \end{aligned} \quad (37)$$

При этом использовано значение ряда

$$\sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2} = \frac{l}{8\mu_p^3} \operatorname{th} \frac{\mu_p l}{2} \left(1 - \frac{\mu_p l}{\operatorname{sh} \mu_p l} \right) = \frac{l}{8\mu_p^3} \psi_p. \quad (38)$$

г) Пусть $m=3p-2$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |A_{3p-2, n}| &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} |A_{3p-2, 3\kappa}| = \\ &= \sum_{\kappa=2, 4, \dots}^{\infty} |b_{p\kappa}| < \frac{\operatorname{cth} \frac{\mu_p l}{2} \left(1 + \frac{\mu_p l}{\operatorname{sh} \mu_p l} \right) - \frac{4}{\mu_p l}}{\operatorname{th} \frac{\mu_p l}{2} \left(1 - \frac{\mu_p l}{\operatorname{sh} \mu_p l} \right)} < 1. \end{aligned} \quad (39)$$

При этом использовано неравенство

$$\sum_{\kappa=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2} < \sum_{\kappa=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2} \quad (40)$$

и значение ряда

$$\sum_{\kappa=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_{\kappa}^2 + \mu_p^2)^2} = \frac{l}{8\mu_p^3} \left[\operatorname{cth} \frac{\mu_p l}{2} \left(1 + \frac{\mu_p l}{\operatorname{sh} \mu_p l} \right) - \frac{4}{\mu_p l} \right]. \quad (41)$$

Из оценок (34), (36), (37) и (39) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{mn}| < 1. \quad (m=1, 2, \dots) \quad (42)$$

Тем самым доказана регулярность системы (32).

Докажем теперь, что совокупность свободных членов $\{B_m\}$ системы (32) ограничена.

Из теории бесселевых функций известно (¹⁰):

а) если $t^{1/2}f(t)$ имеет ограниченное изменение на (a, b) , где (a, b) является какой-нибудь частью интервала $(0, R)$ (или всем этим интервалом), то при $\mu \rightarrow \infty$

$$\int_a^b tf(t)J_n(\mu t)dt = O(\mu^{-1/2}); \quad (43)$$

б) при $x \rightarrow \infty$ (для n — целого) имеет место асимптотическое выражение

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left(x - \frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4} \right); \quad (44)$$

имеем также, что при $x \rightarrow +\infty$

$$I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}; \quad (45)$$

в) для корней μ_k уравнения $J_1(xR)=0$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\mu_k R = \pi \left(k + \frac{1}{4} \right) + O\left(\frac{1}{k} \right). \quad (46)$$

Из разложений (6) и из формул (43) и (44) при $k \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$a_k = O(\mu_k^{-1/2}), \quad b = O(\mu_k^{-1/2}), \quad c_k = O(\mu_k^{-1/2}) \quad \text{и} \quad d_k = O(\mu_k^{-1/2}). \quad (47)$$

Наконец, из разложений (7) будем иметь:

$$g_k = O\left(\frac{1}{k} \right), \quad q_k = O\left(\frac{1}{k} \right). \quad (48)$$

Согласно приведенным оценкам следует, что последовательность $\{B_m\}$ ограничена.

Рассмотрим отдельно три случая.

а) $m=3p$, в этом случае $B_{3p}=\alpha_p$, из (31), (45) и (48) имеем:

$$B_{3p}=\alpha_p = O(1) + pO\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k J_0(\mu_k R)}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} [c_k + (-1)^{p+1} d_k] \right\}, \quad (49)$$

при $p \rightarrow \infty$, имея в виду (44), (46) и (47), можно показать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k J_0(\mu_k R)}{\mu_k^2 + \lambda_p^2} [c_k + (-1)^{p+1} d_k] < O(p^{-(1+\delta)}), \quad (50)$$

где $0 < \delta < 1$ — любое.

Следовательно, получим

$$B_{3p} = O(1). \quad (51)$$

б) $m=3p-1$, тогда $B_{3p-1}=\beta_p$, при $\mu_p \rightarrow \infty$ имеем:

$$B_{3p-1} = O(1) + \mu_p O\left\{ \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} \right\}. \quad (52)$$

Легко видеть, что при $\mu_p \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} < O(\mu_p^{-1}). \quad (53)$$

Таким образом, будем иметь

$$B_{3p-1} = O(1). \quad (54)$$

в) Наконец, когда $m = 3p - 2$, $B_{3p-2} = \gamma_p$ при $\mu_p \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$B_{3p-2} = O(1) + \mu_p O\left\{ \sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} \right\}. \quad (55)$$

$$\sum_{k=2, 4, \dots}^{\infty} \frac{\lambda_k q_k}{\lambda_k^2 + \mu_p^2} < O(\mu_p^{-1}), \quad (56)$$

откуда следует, что

$$B_{3p-2} = O(1).$$

Сектор математики и механики
Академии наук Армянской ССР

F. L. AFRUZISYAN

Կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի վերաբերյալ

Պատվող մարմինների առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի վերաբերյալ կան բազմաթիվ ուսումնասիրություններ: Մի շարք աշխատանքներում [1, 2, 4—6] հիմնականում դիտվում են բեռնավորման մասնավոր դեպքեր, իսկ այն աշխատանքներում [3, 7], որտեղ դիտվում են բեռնավորման ավելի բարդ դեպքեր, լուծումները տրվում են մոտավոր եղանակով:

Հայտնի է, որ պատվող մարմինների առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի լուծումը բերվում է մի բիհարմոնիկ ֆունկցիայի որոնմանը: Այդ ֆունկցիայի մարմնի մակերևույթի վրա ունեցած արժեքները որոշվում են լարումների բաշխման օրենքով:

Այս հոդվածում բերվում է կլոր գլանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի խնդրի ճշգրիտ լուծումը կամավոր բեռնավորման դեպքի համար: Լուծումը ներկայացվում է շարքերով ըստ Բեսսելի ֆունկցիաների: Ըստ որում վերլուծության դորժակիցները որոշելու համար ստացված է անվերջ գծային հավասարումների սխեմա, որը բեզուլյար է:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ В. А. Стеклов. Сообщения Харьковского математического общества. Вторая серия, т. III, 1892. ² Л. Файлон Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. „A“, Vol. 198, 1902. ³ Ф. Пурсер. Trans Roy. Irish Academy, Vol. 32, Sec. A, 1902. ⁴ Б. Г. Галеркин. Известия НИИГ, 1933, № 10. ⁵ Г. С. Шапиро. ДАН СССР, 1942. т. 37, № 9: ПММ, т. VII, вып. 4, 1943. ⁶ Г. С. Шапиро. Осесимметричная деформация тел вращения (докторская диссертация), М., 1947. ⁷ В. К. Прокопов. Труды Ленинградского политехнического института им М. И. Калинина, № 2, 1950. ⁸ С. П. Тимошенко. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937. ⁹ Э. Грей, Г. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Госиноиздат, М., 1949. ¹⁰ Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. Госиноиздат, М., 1949.