ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XVIII 1954 3

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл-корресп. АН Армянской ССР

Уравнения теории сейсмостойкости с учетом рассеяния энергии

(Представлено 22 I 1954)

Сооружение, при землетрясении, находится под воздействием вертикальных и горизонтальных сейсмических колебаний, вызывающих в нем силы инерции в тех же направлениях.

При составлении уравнений колебаний сооружения будем исходить из следующих предпосылок.

1. Скорость распространения сейсмических колебаний как в основании сооружения, так и в самом сооружении мгновенна, что, как известно, допустимо в первом приближении для большинства случаев [1,2].

2. Сооружение является упругой системой, допускающей упругий гистерезис по следующему закону: комплексный вектор напряжений опережает комплексный вектор деформаций на постоянный, достаточно малый угол [3,4].

Доказано, что эта гипотеза дает результаты, значительно лучше согласующиеся с фактами, чем гипотеза Фохта [6].

3. Рассматриваются малые линейные колебания около положения устойчивого равновесия. Это условие также может быть принято для большинства случаев.

В соответствии с общим правилом составления уравнений колеблющейся системы с учетом упругого гистерезиса составим вначале таковые же уравнения в предположении, что имеет место закон Гука [4].

Обозначим компоненты смещений почвы при землетрясении, в прямоугольных координатах, через $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$. Здесь мы подразумеваем, что компоненты перемещения точек основания не зависят от их координат и являются лишь функцией времени, что находится в соответствии с первой предпосылкой.

Под действием инерционных сил, вызванных колебаниями почвы, отдельные точки упругой системы получат перемещения относительно положения ее равновесия. Компоненты относительных перемещений вдоль осей x, y, z обозначим соответственно через $u_0(x, y, z, t)$, $v_0(x, y, z, t)$ и $w_0(x, y, z, t)$, где x, y, z— координаты точек упругой системы.

Полные перемещения упругой системы запишутся так:

$$u = u_0 + x_0,$$
$$v = v_0 + y_0, \qquad (1)$$
$$w = w_0 + z_0.$$

Задачей нашей является отыскание величин относительных перемещений u_0, v_0, w_0, если известны смещения почвы x_0, y_0, z_0.

Зная величины u_0, v_0, w_0, нетрудно определить напряженное состояние упругой системы.

Пусть компоненты деформированного состояния упругой системы вдоль осей x, y, z, отвечающие к-той частоте свободных колебаний, соответственно имеют вид:

$$q_k(t)\, X_k(x, y, z),$$
$$q_k(t)\, Y_k(x, y, z), \qquad (2)$$
$$q_k(t)\, Z_k(x, y, z).$$

Здесь $q_k(t)$ представляет собою к-ую координату упругой системы, а X_k, Y_k, Z_k —компоненты к-ой фундаментальной функции $\overline{\varphi}_k(x, y, z)$.

Стало быть относительные перемещения точек упругой системы можно записать в виде следующих рядов:

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, X_k(x, y, z),$$

$$v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, Y_k(x, y, z), \qquad (3)$$

$$w_0 = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\, Z_k(x, y, z).$$

Поскольку компоненты фундаментальных функций X_k, Y_k, Z_k считаем известными с точностью до постоянного множителя, то задача сводится к определению главных координат $q_k(t)$, для чего воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k'} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0. \qquad (4)$$

Потенциальная энергия системы, в силу ортогональности q_k, имеет следующую квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k^2, \qquad (5)$$

где a_k постоянные, получаемые в результате интегрирования.

Вычислим теперь кинетическую энергию системы. Пусть ее плотность в точке x, y, z есть $\rho(x, y, z)$. Тогда полная кинетическая энергия системы определится следующим образом:

$$T=\frac{1}{2}\iiint(u'^2+v'^2+w'^2)\ \rho(x,\ y,\ z)\ dxdydz, \qquad (6)$$

где u', v', w' компоненты скоростей вдоль осей x, y, z.

Здесь интеграл распространен на всю область, занятую упругой системой.

Подставляя производные по времени от выражений (1) и (3) в (6), получим:

$$T=\frac{1}{2}M\ (x_0'^2+y_0'^2+z_0'^2)+\sum_{k=1}^{\infty}q_k'\left(b_k^{(1)}x_0'+b_k^{(2)}y_0'+b_k^{(3)}z_0'\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}c_k q_k'^2, \qquad (7)$$

где

$$\begin{aligned} M&=\iiint\rho\,dxdydz,\\ b_k^{(1)}&=\iiint X_k\rho\,dxdydz,\\ b_k^{(2)}&=\iiint Y_k\rho\,dxdydz,\\ b_k^{(3)}&=\iiint Z_k\rho\,dxdydz,\\ c_k&=\iiint\left(X_k^2+Y_k^2+Z_k^2\right)\rho\,dxdydz. \end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь M—суммарная масса системы, а $b_k^{(1)}$. $b_k^{(2)}$, $b_k^{(3)}$ и c_k—некоторые постоянные.

Подставляя значения V и T в (4) получим:

$$a_k q_k+c_k q_k''=-b_k^{(1)}x_0''-b_k^{(2)}y_0''-b_k^{(3)}z_0'' \qquad (9)$$

или

$$q_k''+\overset{*}{p}{}_k^2 q_k=-\beta_k^{(1)}x_0''-\beta_k^{(2)}y_0''-\beta_k^{(3)}z_0'', \qquad (10)$$

где

$$\overset{*}{p}{}_k^2=\frac{a_k}{c_k},\ \beta_k^{(1)}=\frac{b_k^{(1)}}{c_k}\ \text{ и т. д.}$$

Как известно, $\overset{*}{p}_k$ представляет собою к-ую круговую частоту свободных колебаний, отвечающую к-ой фундаментальной функции $\bar{\varphi}_k(x,\ y,\ z)$.

Теперь следует полученные уравнения переделать для учета рассеяния энергии в соответствии с высказанной выше гипотезой об упругом гистерезисе. Заметим, что упругие постоянные E и G системы входят в $\overset{*}{p}{}_k^2$ в числитель и притом в первой степени, поэтому в общем случае можно записать

$$\overset{*}{p}{}_k^2=\gamma_k E+\delta_k G,$$

где γ_k и δ_k — некоторые постоянные.

Здесь коэффициент Пуассона не выписывается, так как при анализе работы сооружений, без ущерба для точности, его можно считать равным нулю.

Для учета рассеяния энергии, вызванного упругим гистерезисом, значение $\overset{*}{p}{}_k^2$ следует заменить выражением

$$\gamma_k E e^{i\alpha} + \delta_k G e^{i\alpha_1},$$

причем силы и деформации рассматриваем как комплексные величины.

Последнему выражению придадим более компактный вид:

$$p_k^4 e^{i\alpha_k} = \gamma_k E e^{i\alpha} + \delta_k G e^{i\alpha_1}, \tag{11}$$

причем

$$p_k^4 = (\gamma_k E\cos\alpha + \delta_k G\cos\alpha_1)^2 + (\gamma_k E\sin\alpha + \delta_k G\sin\alpha_1)^2$$

и

$$\mathrm{tg}\,\alpha_k = \frac{\gamma_k E\sin\alpha + \delta_k G\sin\alpha_1}{\gamma_k E\cos\alpha + \delta_k G\cos\alpha_1}.$$

Итак, окончательно, интересующая нас система дифференциальных уравнений колебания сооружения при землетрясении, с учетом явления гистерезиса, всегда может быть представлена в виде:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 e^{i\alpha_k} q_k = -\beta_k^{(1)}\ddot{x} - \beta_k^{(2)}\ddot{y}_0 - \beta_k^{(3)}\ddot{z}_0. \tag{12}$$

В силу линейности полученных уравнений можно находить решения для каждой компоненты сейсмического ускорения в отдельности, и найденные решения сложить.

Нами предлагается следующий метод решения этих уравнений (5)*. В сейсмическом районе устанавливаются приборы, моделирующие колебания сооружений при землетрясении.

Приборы эти, в принципе, представляют из себя систему несвязанных между собою упругих маятников с различными периодами свободных колебаний и снабженных гистерезисным затуханием.

Пусть обобщенные координаты маятников этого прибора u_k.

Тогда для какой-либо компоненты сейсмического ускорения почвы, скажем для $\ddot{x}_0$, имеем:

$$\ddot{q}_k + p_k^2 e^{i\alpha_k} q_k = -\beta_k^{(1)}\ddot{x}_0, \tag{13}$$

$$\ddot{u}_k + p_k^2 e^{i\alpha_k} u_k = -\gamma_k \ddot{x}_0. \tag{14}$$

Оба эти уравнения отличаются лишь постоянным множителем, поэтому должно быть

$$\frac{q_k}{u_k} = \frac{\ddot{q}_k}{\ddot{u}_k} = \frac{\beta_k^{(1)}}{\gamma_k}. \tag{15}$$

Отсюда следует:

$$q_k(t) = \frac{\beta_k^{(1)}}{\gamma_k} u_k(t). \tag{16}$$

Таким образом, зная закон изменения обобщенной координаты маятника прибора (по непосредственным измерениям), круговая часто-

* Байот предложил решение уравнений сейсмостойкости другого типа, путем интегрирования акселерограмм применительно к k-ой фундаментальной функции (7, 8). Предложенный им прием обладает, с нашей точки зрения, двумя существенными недостатками: массовая установка акселерографов в сейсмических районах затруднительна; результаты интегрирования акселерограмм для жестких сооружений, с периодом колебаний до 0,3—0,4 *сек.*, недостоверны.

та свободных колебаний каторого p_k и гистерезисное затухание которого таково же, что и для к-ой фундаментальной функции сооружения, можно определить значение обобщенной координаты сооружения в функции от времени.

В целях дальнейшего существенного упрощения решения задачи, коль скоро для практических целей достаточна грубая оценка силы землетрясения, мы предлагаем ограничиваться фиксацией максимальных значений нормальных координат q_k. Это значит, что в моделирующем приборе достаточно фиксировать лишь максимальные значения отклоненных относительных положений маятников, что приводит к существенному упрощению конструкции прибора из-за устранения записывающего барабана и, вместе с тем, отпадает надобность в постоянном уходе за ним.

Прибор этот можно назвать максимальным многомаятниковым сейсмометром.

На методе обработки показаний таких приборов, для оценки сейсмических сил, действующих на сооружение, мы подробно остановимся в другой работе. Некоторые соображения об этом приведены в одной из наших работ ([5]).

Максимальный многомаятниковый сейсмометр последней конструкции, так называемый АИС-2, представляет собой систему из шести сферических маятников с периодами свободных колебаний 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8 и 1,2 *сек.* для фиксации горизонтальных колебаний и трех маятников с периодами свободных колебаний 0,05; 0,1 и 0,2 *сек.* для фиксации вертикальных колебаний почвы.

Нами предлагается чрезвычайно простая конструкция сферического маятника*. Он представляет собою цилиндрический груз, насаженный на стальной прут. Прут упруго заделан в эластичную (резиновую) пробку, всаженную в трубку, принадлежащую системе земля.

Пробка одновременно выполняет функции пружины и гистерезисного демпфера. Смещения маятника фиксируются кассетой А. К. Шаншиева, упрощенной и приспособленной для сферических маятников Р. С. Варданяном. Точность отсчета прибора 10 μ. Пробный экземпляр такого прибора установлен на сейсмической станции „Ереван". Опытное применение этих приборов имело место для оценки влияния взрывных волн на сооружения.

С помощью сейсмометров можно также решать задачу о сейсмическом микрорайонировании, для чего их нужно расставить в различных почвенных, гидрогеологических и морфологических условиях для сравнительной оценки их показаний.

Для возможности использования и очень слабых землетрясений, в целях сейсмического микрорайонирования, М. Г. Хачияном, по на-

* Насколько нам известно, сферический маятник для одномаятникового сейсмометра впервые применен С. В. Медведевым, но у маятника этого сейсмометра прут, к которому прикреплена масса, играет роль пружины, демпфер принят магнитный, а запись осуществляется по копоти.

шему заданию, сконструирован прецизионный трехмаятниковый сейсмометр с гистерезисным затуханием и с оптической записью. Периоды свободных колебаний маятников в этом приборе приняты равными 0,2, 0,4 и 0,8 *сек*.

Приведенные выше уравнения сейсмостойкости могут быть использованы и для моделирования сооружений, как динамических систем.

Как видно из этих уравнений, при моделировании, постоянную гистерезиса α, представляющую безразмерную величину, следует принимать такую же, что и для оригинала.

Институт строительных материалов
и сооружений Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Սեյսմակայունության տեսության հավասարումները էներգիայի ցրման հաշվառմամբ

Աշխատանքում դիտվում են երկրաշարժի ժամանակ կառուցվածքների տատանումների ընդհանուր դիֆերենցիալ հավասարումները՝ հաշվի առնելով կոնստրուկցիայի նյութի առաձգային հիստերեզիսը: Այդ հավասարումների մոտավոր լուծումը առաջարկվում է կատարել մաքսիմալ բազմաճոճանակավոր սեյսմոմետրի օգնությամբ, որի առանձին ճոճանակների տատանումները մոդելացնում են կառուցվածքների տատանումները:

Այդ գործիքի ճոճանակների մաքսիմում տեղաշարժերի վերլուծությունը թույլ է տալիս գնահատելու, թե ինչպես են իրենց պահում կառուցվածքները երկրաշարժի ժամանակ: Երևանի սեյսմիկ կայանում դրված է այդպիսի գործիքի փորձնական օրինակը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Ботвинкин*, Руководство по сейсмостойкости сооружений, Саогиз, 1933, [2] *К. С. Завриев*, Динамика сооружений. [3] *А. Г. Назаров*, ДАН Арм. ССР, XVI, 3, 1953. [4] *А. Г. Назаров*, Изв. АН Арм. ССР, VI, 4, 1953. [5] *А. Г. Назаров*, Изв. АН Арм. ССР, 3, 1947 [6] *Е. С. Сорокин*, Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания. Сб. исследования по динамике сооружений. Стройиздат, 1951. [7] *М. А. Байот*, Bull. of the Seism. Soc. of America, Vol. 31. 2, April, 1941. [8] *М. А. Байот*, Proc. American Society of Civil Engineers, Yanuary, 1942.