ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XVII 1953 1

МЕХАНИКА

С. А. Амбарцумян

К вопросу расчета устойчивости тонкостенных стержней

(Представлено А. Г. Назаровым 23 III 1953)

В настоящей заметке дается метод расчета устойчивости тонкостенных призматических стержней открытого поперечного сечения, под действием равномерного осевого давления.

1. Призматический тонкостенный стержень представляем как цилиндрическую оболочку, срединная поверхность которой претерпевает изломы по образующим, совпадающим с координатными линиями α_i (β_i = const).

Уравнения устойчивости тонкой цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения при равномерном осевом давлении имеют вид [1]:

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)w=0,$$

$$D\nabla^4 w+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\Phi+N\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0, \tag{1.1}$$

где приняты известные обозначения [1].

Следуя А. Г. Назарову [2], главную кривизну k, ввиду наличия изломов срединной поверхности, подставляем как сумму непрерывной кривизны $k(\beta)$ и сосредоточенных кривизн, концентрированных вдоль линий изломов

$$k=k(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\Gamma^{(1)}(\beta-b_i), \tag{1.2}$$

где γ_i — углы изломов, $\Gamma^{(1)}(\beta-b_i)=\Gamma^{(1)}(b_i)$ — единичные импульсивные функции вдоль линий $\beta=b_i$, n — число изломов срединной поверхности.

Учитывая, что для срединной поверхности призматического стержня $k(\beta)=0$ и подставляя значение k из (1.2) в (1.1), получим уравнения устойчивости тонкостенного призматического стержня, при равномерном осевом давлении:

$$\frac{1}{E\delta}\nabla^4\Phi-\sum_{i=1}^{n}\Gamma^{(1)}(b_i)\frac{\partial^2 w(\alpha, b_i)}{\partial\alpha^2}=0,$$

$$D\triangle^4 w+\sum_{i=1}^{n}\Gamma^{(1)}(b_i)\frac{\partial^2\Phi(\alpha, b_i)}{\partial\alpha^2}+N\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0. \qquad (1.3)$$

2. Предполагая, что под действием сжимающих сил стержень выпучивается по m полуволнам, решения системы (1.3) ищем в виде:

$$\Phi=f(\beta)\sin\frac{m\pi\alpha}{l},\quad w=\varphi(\beta)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}, \qquad (2.1)$$

где $f(\beta)$ и $\varphi(\beta)$ — функции, подлежащие определению в дальнейшем, l — длина стержня.

Выражения (2.1) удовлетворяют условиям свободного опирания по торцам, т. е. по краям $\alpha=0$, $\alpha=l$.

Подставляя значения Φ и w из (2.1) в (1.3), для определения $f(\beta)$ и $\varphi(\beta)$ получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^4 f}{d\beta^4}-2\lambda^2\frac{d^2 f}{d\beta^2}+\lambda^4 f=-E\delta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\Gamma^{(1)}(b_i)\lambda^2\varphi(b_i), \qquad (2.2)$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\beta^4}-2\lambda^2\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}+\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{N}{D}\right)\varphi=\frac{\lambda^2}{D}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\Gamma^{(1)}(b_i)f(b_i). \qquad (2.3)$$

Учитывая, что коэффициенты при $\Gamma^{(1)}(b_i)$ постоянны, взамен (2.2) и (2.3) рассмотрим:

$$\frac{d^4 f}{d\beta^4}-2\lambda^2\frac{d^2 f}{d\beta^2}+\lambda^4 f=\Gamma^{(1)}(\beta) \qquad (а)$$

$$\frac{d^4\varphi}{d\beta^4}-2\lambda^2\frac{d^2\varphi}{d\beta^2}+\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{N}{D}\right)\varphi=\Gamma^{(1)}(\beta). \qquad (б)$$

Решениями соответствующих однородных уравнений будут:

$$f(\beta)=A_1\operatorname{ch}\lambda\beta+A_2\lambda\beta\operatorname{sh}\lambda\beta+A_3\operatorname{sh}\lambda\beta+A_4\lambda\beta\operatorname{ch}\lambda\beta, \qquad (в)$$

$$\varphi(\beta)=B_1 e^{-p\beta}+B_2 e^{p\beta}+B_3\cos q\beta+B_4\sin q\beta, \qquad (г)$$

где

$$p=\sqrt{\lambda^2+\lambda\sqrt{\frac{N}{D}}},\quad q=\sqrt{-\lambda^2+\lambda\sqrt{\frac{N}{D}}},\ \lambda=\frac{m\pi}{l}. \qquad (2.4)$$

Частные решения, отвечающие правым частям уравнений (а) и (б), имеют следующий вид ([3]):

$$\bar{f}(\beta) = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\beta \operatorname{ch}\lambda\beta - \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda\beta\right)\Gamma(\beta), \tag{д}$$

$$\bar{\varphi}(\beta) = \left[\frac{\operatorname{sh} p\beta}{p(p^2+q^2)} - \frac{\sin q\beta}{q(p^2+q^2)}\right]\Gamma(\beta), \tag{е}$$

где $\Gamma(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < 0 \\ 1, & \beta > 0 \end{cases}$ разрывной множитель.

Окончательно, на основании (2.2) и (2.3), а также (а) $\div$ (е) для функций $f(\beta)$ и $\varphi(\beta)$ получим:

$$f(\beta) = A_1 \operatorname{ch}\lambda\beta + A_2\lambda\beta \operatorname{sh}\lambda\beta + A_3 \operatorname{sh}\lambda\beta + A_4\lambda\beta \operatorname{ch}\lambda\beta -$$

$$-\frac{E\delta}{2}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,\varphi(b_i)\left[(\beta - b_i)\operatorname{ch}\lambda(\beta - b_i) - \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(\beta - b_i)\right]\Gamma(\beta - b_i), \tag{2.5}$$

$$\varphi(\beta) = B_1 e^{-p\beta} + B_2 e^{p\beta} + B_3 \cos q\beta + B_4 \sin q\beta +$$

$$+\frac{\lambda^2}{D(p^2+q^2)}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\, f(b_i)\left[\frac{\operatorname{sh} p(\beta - b_i)}{p} - \frac{\sin q(\beta - b_i)}{q}\right]\Gamma(\beta - b_i). \tag{2.6}$$

Решая выражения (2.5) и (2.6) относительно всех линий переломов: $\beta = b_1$, $\beta = b_2$ . . . . . $\beta = b_n$, получим необходимое число уравнений для определения всех значений $f(b_i)$ и $\varphi(b_i)$.

Постоянные интегрирования A_i и B_i, входящие в решения (2.5) и (2.6), определяются в каждом частном случае из граничных условий по сторонам $\beta = 0$ и $\beta = b$ (b — длина поперечного сечения).

3. Далее, без ущерба для общности, рассмотрим задачу устойчивости уголка, когда сторона $\beta = 0$ свободно оперта, а сторона $\beta = b$ свободна. Линия перелома совпадает с линией $\beta = b_1$.

Из (2.5) и (2.6) для $f(b_1)$ и $\varphi(b_1)$ получим:

$$f(b_1) = f^0(b_1), \quad \varphi(b_1) = \varphi^0(b_1). \tag{3.1}$$

Подставляя значения $f(b_1)$ и $\varphi(b_1)$ из (3.1) в (2.5) и (2.6), при этом учитывая, что для уголка $n = 1$, $\gamma_1 = \gamma$, для $f(\beta)$ и $\varphi(\beta)$ получим:

$$f(\beta) = A_1 \operatorname{ch}\lambda\beta + A_2\lambda\beta \operatorname{sh}\lambda\beta + A_3 \operatorname{sh}\lambda\beta + A_4\lambda\beta \operatorname{ch}\lambda\beta -$$

$$-\gamma\frac{E\delta}{2}\left(B_1 e^{-pb_1} + B_2 e^{pb_1} + B_3 \cos qb_1 + B_4 \sin qb_1\right)\left[(\beta - b_1)\operatorname{ch}\lambda(\beta - b_1) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(\beta - b_1)\right]\Gamma(\beta - b_1), \tag{3.2}$$

$$\varphi(\beta) = B_1 e^{-p\beta} + B_2 e^{p\beta} + B_3 \cos q\beta + B_4 \sin q\beta +$$

$$+\gamma\frac{\lambda^2}{D(p^2+q^2)}\left(A_1 \operatorname{ch}\lambda b_1 + A_2\lambda b_1 \operatorname{sh}\lambda b_1 + A_3 \operatorname{sh}\lambda b_1 +\right.$$

$$\left. + A_4\lambda b_1 ch\lambda b_1\right)\left[\frac{\operatorname{sh} p(\beta - b_1)}{p} - \frac{\sin q(\beta - b_1)}{q}\right]\Gamma(\beta - b_1). \tag{3.3}$$

Из вышеупомянутых граничных условий по сторонам $\beta=0$ и $\beta=b$ следует, что

при $\beta=0$

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0; \tag{3.4}$$

при $\beta=b$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}=0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial\beta}=0,$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=0, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta}=0. \tag{3.5}$$

Из граничных условий (3.4), учитывая (2.1), (3.2) и (3.3), получим

$$A_1=0, \quad A_3=-A_4, \quad B_3=0, \quad B_1=-B_2. \tag{3.6}$$

Учитывая также (3.6), из граничных условий (3.5) получим:

$$A_2L_1(b)+A_4L_2(b)-B_2\gamma E\delta K_1\operatorname{sh}pb_1-B_4\gamma\frac{E\delta}{2}K_1\sin qb_1=0,$$

$$A_2L_3(b)+A_4L_1(b)-B_2\gamma E\delta K_2\operatorname{sh}pb_1-B_4\gamma\frac{E\delta}{2}K_2\sin qb_1=0,$$

$$A_2\gamma\frac{P_1}{D}L_1(b_1)+A_4\gamma\frac{P_1}{D}L_2(b_1)+B_2 2(p^2-\mu\lambda^2)\operatorname{sh}pb-$$
$$-B_4(q^2+\mu\lambda^2)\sin qb=0, \tag{3.7}$$

$$A_2\gamma\frac{P_2}{D}L_1(b_1)+A_4\gamma\frac{P_2}{D}L_2(b_1)+B_2 2p[p^2-\lambda^2(2-\mu)]\operatorname{ch}pb-$$

$$-B_4 q[q^2+\lambda^2(2-\mu)]\cos qb=0,$$

где введены следующие обозначения:

$$L_1(\beta)=\lambda\beta\operatorname{sh}\lambda\beta, \quad L_2(\beta)=\lambda\beta\operatorname{ch}\lambda\beta-\operatorname{sh}\lambda\beta,$$
$$L_3(\beta)=\lambda\beta\operatorname{ch}\lambda\beta+\operatorname{sh}\lambda\beta, \quad K_2=(b-b_1)\operatorname{sh}\lambda(b-b_1),$$
$$K_1=(b-b_1)\operatorname{ch}\lambda(b-b_1)-\frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda(b-b_1), \tag{3.8}$$

$$P_1=\lambda^2\left[\frac{p^2-\mu\lambda^2}{p(p^2+q^2)}\operatorname{sh}p(b-b_1)+\frac{q^2+\mu\lambda^2}{q(p^2+q^2)}\sin q(b-b_1)\right],$$
$$P_2=\lambda^2\left[\frac{p^2-\lambda^2(2-\mu)}{p^2+q^2}\operatorname{ch}p(b-b_1)+\frac{q^2+\lambda^2(2-\mu)}{p^2+q^2}\cos q(b-b_1)\right]. \tag{3.9}$$

Уравнения (3.7) будут удовлетворены, если положить $A_2 = A_4 = B_2 = B_4 = 0$, но при этих значениях коэффициентов функции $w(\alpha, \beta)$ и $\Phi(\alpha, \beta)$ будут равны нулю везде, что будет соответствовать „плоской“ форме равновесия.

Деформированная форма равновесия будет возможна, если уравнения (3.7) для коэффициентов A_2, A_4, B_2, B_4 дадут отличные от нуля значения. Для этого необходимо, чтобы детерминант этих уравнений равнялся бы нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} L_1(b) & L_2(b) & -\gamma E\delta K_1 \operatorname{sh} pb_1 & -\gamma \dfrac{E\delta}{2} K_1 \sin qb_1 \\ L_3(b) & L_1(b) & -\gamma E\delta K_2 \operatorname{sh} pb_1 & -\gamma \dfrac{E\delta}{2} K_2 \sin qb_1 \\ \gamma \dfrac{P_1}{D} L_1(b_1) & \gamma \dfrac{P_1}{D} L_2(b_1) & 2(p^2 - \mu\lambda^2) \operatorname{sh} pb & -(q^2 + \mu\lambda^2) \sin qb \\ \gamma \dfrac{P_2}{D} L_1(b_1) & \gamma \dfrac{P_2}{D} L_2(b_1) & 2p[p^2 - \lambda^2(2-\mu)] \operatorname{ch} pb & -q\,[q^2 + \lambda^2(2-\mu)] \cos qb \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.10)$$

Учитывая, что p и q содержат N, уравнением (3.10) следует пользоваться для определения критической силы.

В каждом частном случае (для различных граничных условий и формы поперечного сечения стержня) можно получить аналогичное уравнение для определения критического значения усилия N.

Например, когда стороны $\beta = 0$ и $\beta = b$ совершенно свободны, т. е.
при $\beta = 0$ и $\beta = b$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0, \qquad (3.11)$$

для определения критической силы получим следующее уравнение

$$\left| \begin{matrix} \dfrac{1}{\lambda} L_1(b) & -L_2(b) \\ L_3(b) & -\lambda L_1(b) \\ \dfrac{\gamma}{\lambda} \dfrac{P_1}{D} L_1(b_1) & -\gamma \dfrac{P_1}{D} L_2(b_1) \\ \dfrac{\gamma}{\lambda} \dfrac{P_2}{D} L_1(b_1) & -\gamma \dfrac{P_2}{D} L_2(b_1) \end{matrix} \right.$$

$$
\begin{vmatrix}
-\gamma \frac{E\delta}{2} K_1(t_1 \operatorname{ch} pb_1 + \cos qb_1) & -\gamma \frac{E\delta}{2} K_1(t_2 \operatorname{sh} pb_1 + \sin qb_1) \\
-\gamma\lambda \frac{E\delta}{2} K_2(t_1 \operatorname{ch} pb_1 + \cos qb_1) & -\gamma\lambda \frac{E\delta}{2} K_2(t_2 \operatorname{sh} pb_1 + \sin qb_1) \\
[t_1(p^2 + \mu\lambda^2) \operatorname{ch} pb - (q^2 + \mu\lambda^2) \cdot \cos qb] & [t_2(p^2 - \mu\lambda^2) \operatorname{sh} pb - (q^2 + \mu\lambda^2) \cdot \sin qb] \\
\{t_1 p[p^2 - \lambda^2 (2-\mu)] \operatorname{sh} pb + q[q^2 + \lambda^2(2-\mu)] \sin qb\} & \{t_2 p[p^2 - \lambda^2(2-\mu)] \operatorname{ch} pb - q[q^2 + \lambda^2 (2-\mu)] \cos qb\}
\end{vmatrix} = 0, \tag{3.12}
$$

где введены следующие дополнительные обозначения:

$$
t_1 = \frac{q^2 + \mu\lambda^2}{p^2 - \mu\lambda^2}, \quad t_2 = \frac{q[q^2 + \lambda^2 (2-\mu)]}{p[p^2 - \lambda^2 (2-\mu)]}. \tag{3.13}
$$

В частном случае, когда $\gamma = 0$, из (3.10) получим известное уравнение (4):

$$
q(p^2 - \mu\lambda^2)^2 \operatorname{th} pb = p(q^2 + \mu\lambda^2)^2 \operatorname{tg} qb, \tag{3.14}
$$

с помощью которого можно определить критическое усилие для равномерно сжатой пластинки, которая оперта так, как рассмотренный выше уголок.

4. В заключение отметим, что предложенный метод с успехом может быть применен также для расчета устойчивости тонкостенных призматических стержней замкнутого поперечного сечения.

Институт строительных материалов и сооружений
АН Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Նրբապատ ձողերի կայունության հաշվման մասին

Ելնելով գլանային թաղանթների կայունության հավասարումներից և իմպուլսիվ ֆունկցիաների տեսության հիմնական դրույթներից, տրված է նրբապատ ձողերի կայունությունը հաշվելու նոր մեթոդ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. З. Власов*, Общая теория оболочек, 1949. [2] *А. Г. Назаров*, ДАН Армянской ССР, IX, № 2, 1948. [3] *А. Г. Назаров*, Известия АН Армянской ССР, I, № 1, 1948. [4] *С. П. Тимошенко*, Устойчивость упругих систем, 1916.