ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XVII 1953 1

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян

Оценки производных полиномов и взвешенно-наилучшие приближения в комплексной области

(Представлено А. Л. Шагиняном 4 VI 1953)

В нашей заметке (1) была приведена оценка для производных полиномов, имеющих функциональную мажоранту. Указанная оценка в заметке (2) была использована для установления обратной теоремы для взвешенно-наилучших приближений на всей оси и полуоси типа известных обратных теорем теории приближений, принадлежащих С. Н. Бернштейну (3).

В настоящей заметке нами приводятся формулировки некоторых новых предложений, полученных в этом направлении.

1°. Пусть $y = p(x)$ непрерывная возрастающая функция, определенная на полуоси $[0, +\infty]$ и удовлетворяющая условиям

$$\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-p(x)} = 0, \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

Пусть $x = q(y)$ функция, обратная по отношению к $y = p(x)$. Без ограничения общности положим $p(0) = q(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$, *где* $P_n(z)$ — *полином степени* $n \geqslant 1$ *удовлетворяет условию*

$$|P_n(z)| \leqslant e^{p(|z|)}, \tag{2}$$

в области $$|\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\alpha} \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha < +\infty\right).$$

1) *Если*

$$\int_1^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\alpha}}\, dr = +\infty \tag{3}$$

то справедливы следующие утверждения:

а) *При* $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$, *для любого* $R > 0$ *равномерно относительно* $r_0 \subset [0, R]$ *имеем:*

$$\limsup_{n\to\infty}\left|P_n^{(k)}\left(r_0 e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)\right|\left(\int_0^n \frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^{-\frac{k}{\alpha}} \leqslant A_k\, e^{p(r_0)},\quad k\geqslant 1 \tag{4}$$

где
$$A_k = k!\left(\frac{\alpha e}{\Omega_\alpha k}\right)^{\frac{k}{\alpha}};\ \Omega_\alpha = \frac{\pi}{2}\left\{1+2^\alpha\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}\right\}^{-1}, \tag{5}$$

а при $r_0 \subset [\delta, R]$, $(0<\delta<R)$ *имеем равномерно*

$$\limsup_{n\to\infty} r_0^{k(1-\alpha)}\left|P_n^{(k)}\left(r_0 e^{\pm i\frac{\pi}{r\alpha}}\right)\right|\left(\int_1^n \frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^{-k} \leqslant$$

$$\leqslant B_k\, e^{p(r_0)},\qquad (k\geqslant 1) \tag{6}$$

где

$$B_k = k!\left(\frac{e}{\Omega_\alpha k}\right)^k. \tag{7}$$

б) *При* $\alpha\geqslant 1$, *для любого* $R>0$, *равномерно для значений* $r_0\subset[0, R]$ *имеем*:

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\left|P_n^{(k)}\left(r_0 e^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)\right|}{\left(\int_1^n \frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^k\left\{r_0+(k\,\Omega_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_1^n\frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right\}^{(\alpha-1)\,k}} \leqslant$$

$$\leqslant C_k\, e^{p(r_0)}, \tag{8}$$

где

$$C_k = k!\left(\frac{\alpha e}{\Omega_\alpha k}\right) \tag{9}$$

В частности, из оценки (2) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}\left|P_n^{(k)}(0)\right|\left(\int_1^n\frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^{-\frac{k}{\alpha}}\leqslant k!\left(\frac{(\alpha e)^\alpha}{\Omega_\alpha k}\right)^{\frac{k}{\alpha}} \tag{8'}$$

и равномерно, в любом отрезке $0<\delta\leqslant r_0\leqslant R$ *имеет место оценка*

$$\limsup_{n\to\infty}\left|P_n^{(k)}\left(r_0 e^{\pm i\frac{\pi}{r\alpha}}\right)\right|\left(\int_1^n\frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right)^{-k}\leqslant C_k\, r_0^{(\alpha-1)k}\, e^{p(r_0)} \tag{8''}$$

Замечание. В случае, когда при условии (2) интеграл (3) сходится, можно доказать, что последовательность полиномов $\left\{P_n^{(k)}(z)\right\}$ $(k\geqslant 1)$ равномерно ограничена в любой конечной части области $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha}$.

Если полиномы имеют функциональную мажоранту только на границе области $|\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha < +\infty\right)$, то имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть последовательность полиномов $\{P_n(z)\}$ *удовлетворяет условию*

$$|P_n(z)| \leqslant e^{p(|z|)}, \ \arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1, \tag{9}$$

где
$$\int_1^\infty \frac{p(x)}{x^{1+\omega}}\,dx = +\infty, \qquad \omega = \frac{\alpha}{2\alpha-1} \geqslant 1. \tag{10}$$

Для любого $R > 0$, *равномерно для значений* $r_0 \subset [0, R]$ *будем иметь оценки (4) и (6) теоремы 1.*

Отнесем к классу $C[p(|z|)]$ функции $f(z)$ определенные и непрерывные на данной кривой и удовлетворяющие условию

$$\lim_{z \to \infty} f(z)\, e^{-p(|z|)} = 0.$$

2°. Доказываются следующие предложения.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ *определена и принадлежит к классу* $C[p(|z|)]$ *на лучах* l_α: $\arg z = \pm \frac{\pi}{2\alpha}$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\right)$, *где*

$$\int_1^\infty \frac{p(x)}{x^{1+\omega}}\,dx = +\infty, \qquad \omega = \frac{\alpha}{2\alpha-1}.$$

Пусть для $n \geqslant 1$,

$$E_n[f; p] = \inf_{\{Q_n\}} \left\{ \max_{z \subset l_\alpha} e^{-p(|z|)} \left| f(z) - Q_n(z) \right| \right\} \leqslant$$

$$\leqslant K \left\{ \int_1^n \frac{dy}{[q(y)]^\alpha} \right\}^{-r}, \ (r > 0), \tag{11}$$

где $k > 0$ *константа, не зависящая от* n, *тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если* $\alpha r = p + \delta$, *где* $p \geqslant 0$ *целое* $0 < \delta \leqslant 1$, *то функция* $f(z)$ *имеет непрерывные производные до порядка* p *включительно на всякой конечной части линии* l_α. *Кроме того, как функция от длины дуги, на всякой конечной части* l_α, *при* $0 < \delta < 1$, $f^{(p)}(z) \subset L_1\, p\delta$, *а при* $\delta = 1$, $f^{(p)}(z)$ *имеет модуль непрерывности*

$$\omega(h; f^{(p)}(z)) \leqslant Mh \log \frac{1}{h}, \quad (0 < h < 1). \tag{12}$$

2) *Если* $r = p_1 + \delta_1$, *где* $p_1 \geqslant 0$ *целое и* $0 < \delta_1 \leqslant 1$, *то при* $|z| \geqslant \varepsilon > 0$ *на всякой конечной части* l_α *функция* $f(z)$ *имеет непрерывные производные до порядка* p_1 *включительно.*

Кроме того, как функция от длины дуги, на всякой конечной части l_α, *подчиненной дополнительному условию* $|z| \geqslant \varepsilon > 0$, *при* $0 < \delta_1 < 1$, $f^{(p_1)}(z) \subset Lip\,\delta_1$, *а при* $\delta_1 = 1$, $f^{(p_1)}(z)$ *имеет модуль непрерывности вида* (12).

Следующая теорема показывает, что при дополнительных условиях, налагаемых на вес и на приближаемую функцию теорему 3 при $\alpha = 1$ существенно усилить нельзя.

Теорема 4. Пусть функция $y = p(x)$, *определенная* на $[0, +\infty]$, *удовлетворяет условию*

$$\frac{xp'(x)}{p(x)} \geqslant a > 1 \quad при \quad x \geqslant x_0 > 0. \tag{13}$$

а) *Если* $f(x)$ *непрерывна и ограничена на* $-\infty < x < +\infty$ *вместе со своими производными до порядка* $k \geqslant 1$ *включительно, причем*

$$\underset{-\infty < x < \infty}{Vrai\ \max} | f^{(k)}(x) | \leqslant m_k,$$

то при $n \geqslant 1$

$$E_n[f; p] \leqslant \frac{\pi m_k}{\rho_1^k} \left(\int_1^n \frac{dy}{[q(y)]^a} \right)^{-k} \tag{14}$$

б) *Если* $f(x)$ *непрерывна и ограничена на* $-\infty < x < +\infty$ *вместе со своими производными до порядка* $k \geqslant 0$ *включительно, причем* $f^{(k)}(x)$ *равномерно непрерывна на всей оси* $-\infty < x < +\infty$

$$\omega(h; f^{(k)}) = \sup_{|x''-x'| < h} |f^{(k)}(x'') - f^{(k)}(x')|,$$

то

$$E_n[f; p] \leqslant \frac{\pi}{\rho_2^k} \left(\int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right)^{-k} \omega \left\{ \left(\int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right)^{-1}; f^{(k)} \right\}. \tag{15}$$

В обеих оценках $\rho_1 > 0$ *и* $\rho_2 > 0$ *константы, не зависящие от функции* $f(x)$ *и от* k.

Имеет место также следующая теорема обратного характера.

Теорема 5. Пусть $f(z)$ *определена и принадлежит к классу*

$C[p(|z|)]$ на l_α, где функция $p(x)$ удовлетворяет условиям (1) и

$$\int^{\infty} p(x)\, x^{-1-\alpha} dx = +\infty .$$

Если

$$E_n[f;\, p] \leqslant K \exp\left\{-\gamma \int_1^n \frac{dy}{[q(y)]^\alpha}\right\},\ (n \geqslant 1) \tag{16}$$

где $\gamma > 0$ и $K > 0$ постоянные, не зависящие от n, то

а) при $\alpha < 1$ функция $f(z)$ будет аналитической в бесконечной области, ограниченной кривой

$$r^\alpha \cos \alpha\varphi = \sigma,\quad |\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$$

где $\sigma < \gamma\Omega_\alpha$, и содержащей угол $|\arg z| \geqslant \frac{\pi}{2\alpha}\cdot$

б) При $\alpha = 1$, $f(z)$ будет аналитической функцией в полосе

$$|Re\, z| < \gamma \frac{\pi}{2+\pi}\cdot$$

При $\alpha = 1$ имеет место следующая теорема, обратная теореме 5.

Теорема 6. Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в полосе $|Re\, z| < d$, $(d > 0)$.

Если функция $y = p(x)$ удовлетворяет условию (13), то

$$E_n[f; p(|x|)] \leqslant K\cdot \exp\left\{-\sigma d \int_1^n \frac{dy}{q(y)}\right\},\ (n \geqslant 1)$$

где $K > 0$, $\alpha > 0$ постоянные, не зависящие от n.

Сектор математики
АН Армянской ССР

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

Բազմանդամների ածանցյալների գնահատումը և կշռյալ-լավագույն մոտավորություններ կոմպլեքս տիրույթում

Մեր հոդվածում [1] բերված էր $-\infty < x < +\infty$ առանցքի վրա ֆունկցիոնալ ժամաքանտ ունեցող բազմանդամների ածանցյալի գնահատականը։ Նշված գնահատականը օգտագործված էր [2] կշռյալ-լավագույն մոտավորությունների ուսումնասիրության մեջ։

Ներկա հոդվածում բերվում են այդ ուղղությամբ ստացված մի քանի նոր և ավելի ընդհանուր արդյունքների ձևակերպումները։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 84, № 1 (1952). [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, т. 84, № 6 (1952). [3] См., напр., Натансон, Конструктивная теория функций (1949).