ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XVI 1953 3

МЕХАНИКА

А. Г. Назаров, чл.-корресп. АН Армянской ССР

О рассеянии энергии при упругих колебаниях

(Представлено 18 II 1953)

Уравнение колебаний упругой системы с одной степенью свободы можно записать так:

$$-M\frac{d^2y(t)}{dt^2}-Ky(t)+P(t)=0, \tag{1}$$

где $P(t)$—внешняя сила,

$y(t)$—смещение,

M—масса,

K—сила, вызывающая единичное смещение,

$-Ky(t)$—упругая реакция внутренних сил.

Например, для невесомого стержня постоянного сечения, один конец которого закреплен, а на другом конце действует осевая сила $P(t)$:

$$K=\frac{EF}{l}, \tag{2}$$

где l—длина стержня,

F—площадь его поперечного сечения,

E—модуль упругости.

Введем в уравнение (1) член $-R(t)$, изображающий силу внутреннего трения. Силу эту всегда можно представить как некоторую функцию от t, поскольку y зависит от t.

Получим:

$$-M\frac{d^2y(t)}{dt^2}-R(t)-Ky(t)+P(t)=0. \tag{3}$$

В дальнейшем будем полагать, что член $R(t)$ достаточно мал в сравнении с $Ky(t)$. Тогда в силу непрерывности величины $y(t)$ всегда можно положить, что

$$R(t)=K[y(t+\tau)-y(t)], \tag{4}$$

где τ—некоторый достаточно малый отрезок времени, величина которого в общем случае должна быть зависима от t, чтобы равенство (4) возможно было бы соблюдать.

Подставляя (4) в (3) получим следующее функциональное соотношение.

$$-M\frac{d^2y(t)}{dt^2}-Ky(t+\tau)+P(t)=0. \tag{5}$$

Докажем теорему: *Какова бы ни была природа внутреннего трения, τ — существенно положительная величина.*

Сила трения в любой момент времени t должна совершать отрицательную работу, поскольку по условию задачи всегда должно иметь место рассеяние энергии. Элементарная работа силы трения на перемещении $\Delta y(t)$ есть

$$-R(t)\Delta y(t)=-K[y(t+\tau)-y(t)][y(t+\Delta t)-y(t)]<0.$$

Ясно теперь, что условие это выполняется только при $\tau>0$, так как величина K существенно положительна, а остальные сомножители имеют одинаковый знак, причем $\Delta t>0$.

Сравнение (1) и (5) показывает, что в упругой системе, рассеивающей энергию, внутренние силы в целом независимо от природы сил трения описывают гистерезисную кривую (внутренние силы опережают деформацию).

До настоящего момента мы не делали никаких предположений относительно природы внутреннего трения.

Ниже дадим две гипотезы, приводящие к простейшим линейным дифференциальным уравнениям.

Гипотеза 1. *Природа внутреннего трения такова, что τ есть достаточно малая постоянная величина.*

В этом случае можно принять с достаточной точностью

$$y(t+\tau)\approx y(t)+\tau y'(t)$$

и уравнение (5) примет вид[1]:

$$-M\frac{d^2y}{\partial t^2}-Ky(t)-K\tau y'(t)+P(t)=0. \tag{6}$$

Таким образом, гипотеза эта привела к гипотезе Фохта, но с иным строением постоянной $K\tau$, представляющей силу сопротивления при единичной скорости.

Полученный результат может быть теперь сформулирован в самом общем виде.

---

[1] Здесь принято условие, что $\frac{K\tau^2}{2}$ мало в сравнении с M.

Колебание любой упругой системы без рассеяния энергии может быть охарактеризовано следующими типовыми факторами:

$$E\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad G\frac{\partial u}{\partial y}, \quad -m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \ p(t)$$

где u—компонента смещения вдоль оси x.

Другие компоненты смещения не выписываем для компактности, так как они не дают ничего нового.

Итак колебание упругой системы характеризуется продольными и тангенциальными напряжениями, силой инерции и внешней возмущающей силой $p(t)$ в общем случае как-то распределенных.

Факторы эти входят, при малых перемещениях, в дифференциальные уравнения колебаний линейным образом.

Обозначая через L линейное дифференциальное уравнение или систему таковых, можем записать уравнение колебаний в самом общем виде[1]:

$$L\left[E\frac{\partial u(t)}{\partial x}, \quad G\frac{\partial u(t)}{\partial y}, -m\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}, p(t)\right] = 0. \tag{7}$$

Таким образом, здесь L является линейным оператором, допускающим линейные операции над членами, заключенными в скобках, в том числе и дифференцирование. Члены эти зависят не только от времени, но и от координат x, y, z.

Чтобы учесть рассеяние энергии в соответствии с приведенным выше правилом, мы должны внутренние силы сдвинуть относительно внешних сил на отрезок времени τ.

Учитывая, что факторы рассеяния энергии в общем случае для продольных и тангенциальных деформаций могут быть различными, мы должны подобрать для них соответственно различные постоянные τ и τ_1.

Поэтому для той же упругой системы учет рассеяния энергии приводит к следующему уравнению

$$L\left[E\frac{\partial u(t+\tau)}{\partial x}, \quad G\frac{\partial u(t+\tau_1)}{\partial y}, -m\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}, \quad p(t)\right] = 0.$$

По условию τ и τ_1 малы и постоянны, поэтому уравнение это можем переписать с достаточной точностью следующим образом:

$$L\left[E\frac{\partial u(t)}{\partial x} + E\tau\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t\partial x}; \quad G\frac{\partial u(t)}{\partial y} + G\tau_1\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t\partial y}, \right.$$

$$\left. -m\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}, \quad p(t)\right] = 0. \tag{8}$$

[1] Оператор L здесь и в дальнейшем подразумевается для одномерных задач. В случае сложного напряженного состояния, например, для уравнений теории упругости, вопрос требует специального изучения.

Сравнивая уравнения (7) и (8) мы приходим к следующему правилу составления дифференциальных уравнений колебания с учетом рассеяния энергии из таковых же уравнений без учета рассеяния энергии[1].

Надо к членам, отвечающим внутренним силам, то-есть содержащим модули упругости E и G в числителе, приписать те же члены, взяв от них производные по t и помножив соответственно на постоянные τ и τ_1.

Таково общее правило составления уравнений с учетом рассеяния энергии из уравнений, не учитывающих рассеяние энергии в соответствии с гипотезой I. Это правило нами было выведено ранее и другим путем ([5]). К сожалению, на практике правило это не всегда соблюдается, что приводит к ошибочным уравнениям ([3]).

Такова гипотеза Фохта в самом общем виде в интерпретации данной нами. Известно, что экспериментальные данные приводят к результатам, сильно противоречащим этой гипотезе. В частности, по этой гипотезе логарифмический декремент затухания изменяется с частотой, чего не наблюдается в действительности.

Рассмотрим теперь другую гипотезу.

Гипотеза II. *Природа внутреннего трения такова, что τ и τ_1 есть величины обратно пропорциональные частоте колебаний p, т. е.: $\tau = \dfrac{\alpha}{p}, \tau_1 = \dfrac{\alpha_1}{p}$, где α и α_1 — некоторые постоянные.*

Обратимся вновь к основному уравнению (5). Рассмотрим сначала свободные колебания, чему отвечает уравнение:

$$- Ky(t + \tau) - M \frac{d^2y(t)}{dt^2} = 0. \tag{9}$$

Обозначим огибающую свободных колебаний упругой системы через $u(t)$. Тогда при подходящем выборе начала отсчета координат можно записать:

$$y_1\ (t) = u\ (t) \cos pt. \tag{10}$$

Законность такой подстановки подтвердится впоследствии.

Подставим это выражение в (9)

[1] В общем случае, для уравнений теории упругости, мы полагаем возможным существование следующих соотношений между деформациями и напряжениями:

$$X_x = \lambda\Delta + 2\mu e_{xx} + \lambda\tau_2 \frac{\partial\Delta}{\partial t} + \mu\tau_1 \frac{\partial e_{xx}}{\partial t},$$

$$Y_x = \mu e_{yz} + \mu\tau_1 \frac{\partial e_{yz}}{\partial t}.$$

Здесь τ_2 — новая постоянная, связанная с τ, τ_1, λ и μ. Остальные соотношения получаются циклической перестановкой.

$$-Ku(t+\tau)\cos p(t+\tau)-M\frac{d^2}{dt^2}\,[u(t)\,\cos pt]. \tag{11}$$

Имея в виду, что по условию гипотезы $p\tau=\alpha$, а также то обстоятельство, что огибающая колебаний изменяется значительно медленнее, чем самые колебания и потому можно принять $u(t+\tau)\sim u(t)$, уравнение (11) перепишем в виде:

$$-Ku(t)\cos\,(pt+\alpha)-M\frac{d^2}{dt^2}\,[u(t)\cos\,pt]=0. \tag{12}$$

Из полученного линейного дифференциального уравнения нетрудно найти значение p и функцию $u\,(t)$.

Этим подтверждается законность подстановки (10).

Подстановка

$$y_2=u(t)\sin pt \tag{13}$$

приводит к аналогичному результату

$$-Ku(t)\sin\,(pt+\alpha)-M\frac{d^2}{dt^2}\,[u(t)\sin pt]=0. \tag{14}$$

Введем комплексную функцию

$$y(t)=y_1(t)+iy_2(t)=u(t)e^{ipt},$$

тогда получим на основании (12) и (14) следующее дифференциальное уравнение

$$-Ku(t)e^{i(pt+\alpha)}-M\frac{d^2}{dt^2}\,[u(t)\,e^{ipt}]=0,$$

или, наконец:

$$-Ky(t)e^{i\alpha}-M\,\frac{d^2y(t)}{dt^2}=0, \tag{15}$$

где под $y\,(t)$ подразумевается комплексная функция, вещественная и мнимая части которой удовлетворяют рассматриваемому решению.

Если возмущающую силу принять в виде

$$P(t)=P_0\,(\cos\omega t+i\sin\omega t)=P_0e^{i\omega t}, \tag{16}$$

то дифференциальное уравнение (5) перепишется так:

$$-Ky(t)e^{i\alpha}-M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+P_0e^{i\omega t}=0. \tag{17}$$

Вещественная и мнимая части этого уравнения представляют решение для возмущающих сил $P_0\cos\omega t$ и $P_0\sin\omega t$.

Из приведенного комплексного представления следует, что ***комплексный вектор внутренних упругих сил $Ky\,(t)$ повернут на угол α против часовой стрелки.*** Этим учитывается потеря необратимой части энергии.

Если дана возмущающая сила $P(t)$ в общем виде, то ее следует разложить в ряд Фурье и для каждого члена разложения найти свое решение. Впрочем, можно поступить и следующим образом. Из дифференциального уравнения для свободных колебаний следует найти уравнение колебаний для единичного импульса. Представив площадь, ограниченную $P(t)$, как систему элементарных импульсов, найдем искомое решение в виде интеграла.

Для определения величины α рассмотрим безинерционное циклическое колебание.

Приняв в уравнении (17) $M=0$, получим:

$$y(t) = \frac{P_0}{K} e^{i(\omega t - \alpha)}. \tag{18}$$

Вычислим работу трения, совершенную за полный цикл колебаний для вещественной части (18)

$$\Delta W = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P dy = -\frac{P_0^2 \omega}{K} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos\omega t \sin(\omega t - \alpha) dt = -\frac{P_0^2 \pi \sin\alpha}{K}.$$

Учитывая, что потенциальная энергия $W = \frac{P_0^2}{2K}$ и что коэффициент поглощения энергии $\psi = \frac{\Delta W}{W}$, найдем:

$$\sin\alpha = \frac{\psi}{2\pi}. \tag{19}$$

Для всех материалов $\frac{\psi}{2\pi}$ — величина достаточно малая, поэтому с точностью до малых высшего порядка можем записать:

$$\sin\alpha \approx \alpha = \frac{\psi}{2\pi} \tag{20}$$

$$\cos\alpha = 1 \tag{21}$$

и, стало быть,

$$e^{i\alpha} \approx 1 + i\frac{\psi}{2\pi}. \tag{22}$$

Мы пришли с точностью до малых высшего порядка к результату Б. С. Сорокина, принявшего в основу своих исследований замкнутую петлю гистерезиса эллиптической формы, что допустимо лишь для стационарных однотонных колебаний ([1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11]).

Принятый здесь множитель $e^{i\alpha}$ более удобен, нежели множитель $1+i\frac{\psi}{2\pi}$.

Предлагаемая нами гипотеза II является более общей гипотезой, чем гипотеза Сорокина и позволяет расширить пределы применимости результатов последней.

Дадим теперь самую общую формулировку гипотезе II.

Рассмотрим вновь оператор (7), изображающий дифференциальное уравнение колебаний упругой системы.

Примем в этом уравнении взамен $p(t)$ комплексную силу $p(t) = \Sigma p_к e^{i\omega_к t}$, где $p_к$ — некоторые функции x, y, z.

Чтобы учесть рассеяние энергии в соответствии с гипотезой II, мы должны фазу внутренних сил сдвинуть против часовой стрелки на угол α, для чего необходимо члены, содержащие внутренние силы (они имеют в числителях модули упругости) умножить на $e^{i\alpha}$.

Учитывая, что факторы рассеяния энергии в общем случае для продольных и тангенциальных деформаций могут быть различными, мы должны подобрать для них соответственно различные постоянные α и α_1.

Поэтому для рассматриваемой упругой системы учет рассеяния энергии приводит к следующему уравнению[1]

$$L\left[Ee^{i\alpha}\frac{\partial u(t)}{\partial x},\ Ge^{i\alpha_1}\frac{\partial u(t)}{\partial y},\ -m\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2},\ \bar{\Sigma} p_к e^{i\omega_к t}\right] = 0. \qquad (23)$$

Например, свободные поперечные изгибные колебания упругой балки постоянного сечения без учета рассеяния энергии представляются следующим уравнением:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

По гипотезам I и II учет рассеяния энергии приводит соответственно к следующим результатам:

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \tau EI\frac{\partial^5 y}{\partial t\,\partial x^4} = -\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$e^{i\alpha}EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{q}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Сопоставление гипотез I и II приводит к выводу, что для них значения τ отличаются лишь множителем, представляющим частоту колебаний. Поэтому между ними не должно быть принципиальной разницы. Докажем это.

---

[1] В общем случае, для уравнений теории упругости, мы полагаем возможным существование следующих соотношений между деформациями и напряжениями:

$$X_x = \lambda\Delta e^{i\alpha_2} + 2\mu e_{xx}e^{i\alpha_1},$$

$$Y_z = \mu e_{yz}e^{i\alpha_1}.$$

Здесь α_2—новая постоянная. Остальные соотношения получаются циклической перестановкой.

Расмотрим сначала свободные колебания, соответствующие операторы примут вид:

$$\text{I} \quad L\left[-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad E\frac{\partial u}{\partial t}+E\tau\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x},\quad G\frac{\partial u}{\partial y}+G\tau_1\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right]=0$$

$$\text{II} \quad L\left[-m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad Ee^{i\alpha}\frac{\partial u}{\partial x},\quad Ge^{\alpha_1}\frac{\partial u}{\partial y}\right]=0.$$

Пусть система I совершает монохроматическое колебание типа

$$u=\overline{X}\cos pt,$$

где $\overline{X}$—некоторая фундаментальная функция.

Тогда оператор для системы I примет вид:

$$L\left[mp^2\overline{X}\cos pt,\quad E\frac{\partial\overline{X}}{\partial x}(\cos pt-\tau p\sin pt),\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\overline{X}}{\partial y}(\cos pt-\tau_1 p\sin pt)\right]. \qquad (*)$$

Пусть система II совершает монохроматическое колебание типа

$$u_1=\overline{X}_1e^{ip_1t},$$

тогда система эга примет вид:

$$L\left[mp_1^2\overline{X}_1e^{ip_1t},\quad E\frac{\partial\overline{X}_1}{\partial x}e^{i(p_1t+\alpha)},\quad G\frac{\partial X_1}{\partial y}e^{i(pt_1+\alpha_1)}\right]=0.$$

Отделив вещественную часть, что допустимо вследствие линейности операций, получим:

$$L\left[mp_1^2\overline{X}_1\cos p_1t,\ E\frac{\partial\overline{X}_1}{\partial x}\cos(p_1t+\alpha),\quad G\frac{\partial\overline{X}_1}{\partial y}\cos(p_1t+\alpha_1)\right]=0.$$

В силу малости α и α_1 можно положить

$$\cos(p_1t+\alpha)=\cos pt\cos\alpha-\sin pt\sin\alpha\approx\cos pt-\alpha\sin pt$$

и, соответственно

$$\cos(p_1t+\alpha_1)\approx\cos p_1t-\alpha_1\sin p_1t.$$

Последний оператор с достаточной точностью перепишется в виде:

$$L\left[mp_1^2\overline{X}_1\cos p_1t,\quad E\frac{\partial\overline{X}_1}{\partial x}(\cos p_1t-\alpha\sin p_1t),\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\overline{X}_1}{\partial y}(\cos p_1t-\alpha_1\sin p_1t)\right]=0. \qquad (**)$$

Сопоставляя (*) и (**) приходим к выводу, что для одинаковых тонов свободных колебаний, при условии $\alpha=\tau p$ и $\alpha_1=\tau_1 p$, имеет место

$$p\approx p_1 \text{ и } \overline{X}\approx\overline{X}_1.$$

Рассмотрим теперь гармоническое вынужденное колебание, отвечающее возмущающей силе $p(t) = p_0 \cos\omega t$.

Тогда, как известно, система совершает вынужденное колебание типа

$$u = \bar{X}\cos(\omega t + \beta),$$

где $\bar{X}$—амплитуда вынужденных колебаний, β—сдвиг фазы, зависящий от фактора рассеяния энергии.

Оператор, отвечающий гипотезе I, запишется так:

$$L\left[m\omega^2\bar{X}\cos(\omega t + \beta),\ E\frac{\partial\bar{X}}{\partial x}(\cos(\omega t + \beta) - \tau\omega\sin(\omega t + \beta)),\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\bar{X}}{\partial y}\left(\cos(\omega t + \beta) - \tau_1\omega\sin(\omega t + \beta)\right),\ p_0\cos\omega t\right] = 0. \qquad (*')$$

Пусть возмущающаяся сила в системе II есть

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t}$$

и вынужденные колебания совершаются по следующему закону

$$u = \bar{X}_1 e^{i(\omega t + \beta_1)}.$$

Соответствующий оператор тогда примет вид:

$$L\left[m\omega^2\bar{X}_1 e^{i(\omega t + \beta_1)},\ E\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial x}e^{i(\omega t + \beta_1 + \alpha)},\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial y}e^{i(\omega t + \beta_1 + \alpha_1)},\ p_0 e^{i\omega t}\right] = 0.$$

Отделив вещественную часть получим:

$$L\left[m\omega^2\bar{X}_1\cos(\omega t + \beta_1),\ E\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial x}\cos(\omega t + \beta_1 + \alpha),\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial y}\cos(\omega t + \beta_1 + \alpha_1),\ p_0\cos\omega t\right] = 0,$$

но в силу малости величин α и α_1 имеем:

$$\cos(\omega t + \beta_1 + \alpha) \approx \cos(\omega t + \beta_1) - \alpha\sin(\omega t + \beta_1)$$

$$\cos(\omega t + \beta_1 + \alpha_1) \approx \cos(\omega t + \beta_1) - \alpha_1\sin(\omega t + \beta_1).$$

Итак, линейный оператор, отвечающий гипотезе II, окончательно примет вид:

$$L\left[m\omega^2\bar{X}_1\cos(\omega t + \beta_1),\ E\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial x}\left(\cos(\omega t + \beta_1) - \alpha\sin(\omega t + \beta_1)\right),\right.$$

$$\left.G\frac{\partial\bar{X}_1}{\partial y}\left(\cos(\omega t + \beta_1) - \alpha_1\sin(\omega t + \beta_1)\right),\ p_0\cos\omega t\right] = 0. \qquad (**')$$

Сравнивая $(*')$ и $(**')$ приходим к заключению, что при достаточно малых величинах сил затухания имеет место $\bar{X}_1 \approx \bar{X}$, $\beta_1 \approx \beta$ при условии $\alpha = \tau\omega$ и $\alpha_1 = \tau_1\omega$.

Таким образом, для каждого монохроматического колебания, будь то свободного или вынужденного, результаты по обеим гипотезам совпадают при условии

$$\alpha = \tau p \quad \text{и} \quad \alpha_1 = \tau_1 p, \qquad (24)$$

где p—частота колебаний вынужденных или свободных.

Конечно, гипотезе II следует отдать предпочтение по сравнению с гипотезой I, так как они эквивалентны в отношении простоты результатов и, вместе с тем, гипотеза II значительно лучше отображает действительную картину рассеяния энергии, нежели гипотеза I.

Поэтому, при моделировании динамики упругих систем следует по возможности придерживаться гипотезы II.

В приборах же, моделирующих колебания сооружений, магнитные или жидкостные демпферы нами заменены сухими демпферами на базе каучуковых, пробковых, волокнистых и прочих материалов с высокими поглощающими свойствами.

Институт строй материалов
и сооружений АН Армянской ССР

Ա. Գ. ՆԱԶԱՐՈՎ

Էներգիայի ցրման մասին առաձգական տատանումների ժամանակ

Աշխատանքում ցույց է տրված, որ առաձգական տատանումների ժամանակ հնարավոր է հաշվել ներքին շփման ուժերը, եթե ներքին առաձգական ուժերը τ մեծությամբ առաջ տեղափոխվեն համապատասխան ձևափոխություններից, որտեղ τ—փոքր դրական մեծություն է։

Աշխատանքում տրված են երկու հիպոթեզներ։ I հիպոթեզան, որտեղ τ ընդունված է հաստատուն մեծություն, խնդիրը բերում է Ֆոյգտի հիպոթեզային, այն տարբերությամբ, որ ներքին շփման ուժը միավոր արագության դեպքում արտահայտող գործակիցը ունի այլ կառուցվածք։

II հիպոթեզան ընդունում է, որ $\alpha=\tau p$ գործակիցը հաստատուն է, որտեղ p—ազատ կամ ստիպողական տատանումների հաճախականությունն է, և այդ կապակցությամբ խնդիրը բերում է (17) տիպի գծային դիֆերենցիալ հավասարումներին, այսինքն բարձր կարգի փոքր մեծությունների ճշտությամբ Ե. Ս. Սորոկինի ստացած արդյունքներին։

Մեր կողմից ներկայացվող II հիպոթեզան ավելի ընդհանուր է, քան Սորոկինի հիպոթեզան և թույլ է տալիս ընդլայնելու վերջինիս արդյունքների կիրառման սահմանները, և դրա հետ մեկտեղ ավելի հարմար է մաթեմատիկական արտահայտության կոմպակտ լինելու պատճառով։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. И. Бать*, ПММ, т. IV, вып. 3, 1940. [2] *Н. Н. Давиденков*, ЖТФ, т. VIII, вып. 6, 1938. [3] *И. Л. Корчинский*, Расчет строительных конструкций на вибрационную нагрузку, Стройиздат, 1948; [4] *Е. Б. Лунц*, ПММ, т. I, вып. 3, 1938. [5] *А. Г. Назаров*, Тр. Тбил. геофиз. инст., т. II, 1937; [6] *Д. Ю. Панов*, ПММ, т. IV, вып. I. [7] *Г. С. Писаренко*, ЖТФ, т. XIX, вып. 12, 1949. [8] *Ю. Н. Работнов*, ПММ, т. XVI, вып. I. 1952. [9] *Е. С. Сорокин*, Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания. Сб. исследования по динамике сооружений. Стройиздат, 1951. [10] *Роуэтт*, Proc.. Rou. Soc. (A), 89, 1913. [11] *Кимбалл*, Phis. Rev. 21, 1923.