ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XVI 1953 3

МАТЕМАТИКА

В.-К. И. Карабегов

Об устойчивости в замкнутой области задачи Дирихле для линейных уравнений эллиптического типа

(Представлено А. Л. Шагиняном 3 XI 1952)

В предлагаемой заметке рассматривается вопрос об устойчивости в замкнутой области проблемы Дирихле для линейных уравнений эллиптического типа с достаточно гладкими коэффициентами.

Доказывается, что если граничная точка области является точкой устойчивости для уравнения Лапласа, то она будет точкой устойчивости и для всех уравнений указанного вида.

Исходя из этого результата, устанавливается, что проблема Дирихле для этих уравнений устойчива в данной замкнутой области тогда и только тогда, когда она устойчива в той же замкнутой области для уравнения Лапласа.

Рассмотрим линейное уравнение эллиптического типа

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что коэффициенты a_{ij} суть трижды непрерывно дифференцируемые функции в некоторой ограниченной замкнутой области S, а коэффициенты b_i — дважды непрерывно дифференцируемы в S.

Для уравнения (1) можно построить в области S функцию $\frac{1}{\rho(P, Q)}$ (фундаментальное решение Леви), удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\frac{1}{\rho(P, Q)}$, как функция от P, при $P \neq Q$ удовлетворяет уравнению (1).

2) Если Q_0 фиксированная точка S, то существуют две положительные постоянные (зависящие от Q_0) — $C_1(Q_0)$ и $C_2(Q_0)$ такие, что

$$\frac{C_1(Q_0)}{PQ} < \frac{1}{\rho(P, Q)} < \frac{C_2(Q_0)}{PQ} \qquad (2)$$

для всех Q из некоторой окрестности точки Q_0 и произвольных P из S.

Решения уравнения (1) удовлетворяют принципу максимума.

Рассмотрим область D, лежащую целиком внутри S. Предположим, что граница Г области D не содержит внутренних точек, т. е. если точка Q принадлежит Г, то в любой ее окрестности лежат точки из дополнения к $\overline{D}$. Зададим на Г непрерывную функцию $f(Q)$ и продолжим ее непрерывным образом на всю область S. Непрерывное продолжение функции f снова обозначим через f.

Рассмотрим монотонно-убывающую последовательность областей

$D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ таких, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \overline{D}$.

Каждая из областей D_n — нормальна, т. е. для нее разрешима задача Дирихле при любой непрерывной граничной функции.

(В силу известного результата О. А. Олейник, область будет нормальной относительно уравнения (1) тогда и только тогда, когда она нормальна относительно уравнения Лапласа.)

Обозначим через $U_{n,f}$ решение задачи Дирихле для уравнения (1), области D_n и граничной функции f. Легко показать, что последовательность $U_{n,f}$ сходится в замкнутой области $\overline{D}$, а предельная функция U_f удовлетворяет внутри D уравнению (1).

Проблема Дирихле называется устойчивой в замкнутой области $\overline{D}$, если, для любой непрерывной граничной функции f, последовательность $U_{n,f}$ равномерно сходится на границе Г к функции f.

Точка Q границы Г области D называется точкой устойчивости, если для любой непрерывной функции f имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,f}(Q) = f(Q). \tag{3}$$

Для уравнения Лапласа имеет место следующий необходимый и достаточный критерий акад. М. В. Келдыша.

Точка Q границы Г области D будет точкой устойчивости тогда, когда расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_n . \tag{4}$$

Здесь λ_n есть емкость открытого множества Q_n точек P дополнения к $\overline{D}$, расстояния которых до точки Q удовлетворяют неравенствам:

$$2^{-n} < PQ < 2^{-n+1} \tag{5}$$

Если мы покажем, что расходимость ряда (4) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы точка Q была точкой устойчивости относительно уравнения (1), то тем самым будет доказана следующая:

Теорема 1. Точка Q границы Γ области D будет точкой устойчивости относительно уравнения (1) тогда и только тогда, когда она будет точкой устойчивости относительно уравнения Лапласа.

Ступенькой $\Psi_{\rho_Q}(P)$ с центром в граничной точке Q назовем функцию, равную единице внутри сферы радиуса ρ с центром в точке Q и равную нулю вне этой сферы.

Для ступеньки Ψ_{ρ_Q} можно построить последовательность $U_{n,\Psi}$.

Для того, чтобы точка Q была точкой устойчивости относительно уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,\Psi_{\rho_Q}}(Q)=1 \tag{6}$$

для всех радиусов ρ.

Так как решения уравнения (1) удовлетворяют принципу максимума, то доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству этого утверждения для уравнения Лапласа.

Перейдем теперь к доказательству необходимости и достаточности указанного критерия.

а) Доказательство необходимости. Пусть ряд (4), построенный для граничной точки Q_0 сходится. Выберем m столь большим, чтобы иметь

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} 2^n\lambda_n < \frac{1}{4}\,\frac{C_1(Q_0)}{C_2(Q_0)}. \tag{7}$$

(Считаем, что для точек Q из сферы $QQ_0 < 2^{-m+1}$ выполнено условие (2)).

Выберем $\rho_0 = 2^{-m}$ и построим ступеньку Ψ_{ρ_0} относительно точки Q_0. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} U_{n,\Psi_{\rho_0}}(Q_0)<1$. Фиксируем некоторое n.

Граница Γ_n области D_n будет лежать вне некоторой сферы с центром в Q_0 радиуса 2^{-q_n}.

Обозначим через $E_j^{(n)}$ замкнутое множество точек дополнения к D_n, удовлетворяющих условию:

$$2^{-j}\leqslant PQ_0\leqslant 2^{-j+1}\ (J=m, m+1, \ldots q_n).$$

Пусть $\mu_j^{(n)}(e)$ функция распределения массы на $E_j^{(n)}$, соответствующая единичному потенциалу $W_j^{(n)}$ множества $E_j^{(n)}$.

Построим функции

$$\tilde{W}_j^{(n)}(P)=\int\limits_{E_j^{(n)}}\frac{d\mu_j^{(n)}(Q)}{\rho(P,Q)}.$$

В силу неравенства (2) имеем

$$C_1(Q_0)\, W_j^{(n)}(P) \leqslant \tilde{W}_j\,(P) \leqslant C_2(Q_0)\, W_j^{(n)}(P)\,. \tag{8}$$

Следовательно во всех точках Γ_n, являющихся регулярными граничными точками $E_j^{(n)}$, предельные значения функции $\tilde{W}_j^{(n)}(P)$ будут больше или равны $C_1(Q_0)$. В остальных точках Γ_n функция $\tilde{W}_j^{(n)}(P)$ положительна. Следовательно (в силу принципа максимума)

$$U_{n,\Psi_{\rho_0}}(P) \leqslant \frac{1}{C_1(Q_0)} \sum_{j=m}^{q_n} \tilde{W}_j^{(n)}(P).$$

В частности,

$$U_{n,\Psi_{\rho_0}}(Q_0) \leqslant \frac{1}{C_1(Q_0)} \sum_{j=m}^{q_n} \tilde{W}_j^{(n)}(Q_0) \leqslant \frac{C_2(Q_0)}{C_1(Q_0)} \sum_{j=m}^{q_n} W_j^{(n)}(Q_0) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2(Q_0)}{C_1(Q_0)} \sum_{j=m}^{q_n} 2^j \lambda_j \leqslant \frac{C_2(Q_0)}{C_1(Q_0)} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{C_1(Q_0)}{C_2(Q_0)} = \frac{1}{4}\,.$$

В силу произвольности n получаем

$$\lim_{n\to\infty} U_{n,\Psi_{\rho_0}}(Q_0) \leqslant \frac{1}{4}\,,$$

следовательно точка Q_0 не может быть точкой устойчивости.

в) Докажем достаточность. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \lambda_n$ расходится.

Построим замкнутые множества E_n, лежащие целиком внутри соответствующих множеств O_n с емкостями γ_n, удовлетворяющими неравенствам $\gamma_n > \frac{1}{2}\lambda_n$.

Пусть область G_0 с границей Γ_0 лежит внутри области S и содержит замкнутую область $\bar{D}$ внутри.

Пересечение области G_0 и дополнения к замыканию множества $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ обозначим через Δ. Δ можем считать областью.

В силу расходимости ряда $\Sigma 2^n \gamma_n$, точка Q_0 является регулярной граничной точкой области Δ. Через Δ_p обозначим область, являющуюся пересечением дополнения к замкнутому множеству $\sum\limits_{n=1}^{p} E_n$ и области G_0, Рассмотрим произвольную ступеньку $\Psi_\rho(P)$ с центром в точке Q_0 и пусть $2^{-m} < \frac{1}{2}\rho$. Через $V_{\rho,p}$ обозначим решение задачи Дирихле для уравнения (1) в области Δ_p для граничных данных, равных единице на множествах $E_{m+1}, \ldots E_p$, и равных нулю на множествах $E_1, E_2, \ldots, E_m$ и на Γ_0.

Пусть $m < 1$ — есть максимум функции $V_{\rho,p}(P)$ на сфере $PQ_0 = \rho$ Тогда

$$V_{\rho,p}(P) \leqslant (1-m)\Psi_\rho(P) + m.$$

При достаточно большом n область D_n не содержит точек множеств $E_1, E_2, \ldots, E_p$ и

$$V_{\rho,p}(P) \leqslant (1-m)U_{n,\Psi_\rho}(P) + m.$$

В частности,

$$V_{\rho,p}(Q_0) \leqslant (1-m)U_{\Psi_\rho}(Q_0) + m.$$

Если мы докажем, что $\lim\limits_{p\to\infty} V_{\rho,p}(Q_0) = 1$, то получим $U_{\Psi_\rho}(Q_0) \geqslant 1$ т. е. $U_{\Psi,\rho}(Q_0) = 1$ и тем самым, в силу произвольности ρ, будет доказано, что точка Q_0 является точкой устойчивости для области D и уравнения (1).

Через $V_\rho(P)$ обозначим решение задачи Дирихле для уравнения (1), области Δ и граничных данных, равных единице на E_{m+1}, $E_{m+2}, \ldots$ и в точке Q_0 и равных нулю на E_1, E_2, $\ldots E_m$ и на Γ_0. Так как точка Q_0 является регулярной, то $\lim\limits_{P\to Q_0} V_\rho(P) = 1$. Поэтому в точках P области Δ, лежащих на некоторой сфере $PQ_0 = r(\varepsilon)$, будем иметь

$$V_\rho(P) > 1 - \varepsilon.$$

Пусть $2^{-p} < r(\varepsilon)$.

В силу принципа максимума в области Δ вне сферы радиуса 2^{-p} имеет место неравенство:

$$V_\rho(P) < V_{\rho,p}(P) + \frac{1}{2^p C_1(Q_0)\rho(P,Q_0)}.$$

Следовательно, при $PQ_0 = r(\varepsilon)$ получим

$$1 - \varepsilon < V_{\rho,p}(P) + \frac{1}{2^p C_1(Q_0)} \cdot \max_{PQ_0 = r(\varepsilon)} \frac{1}{\rho(P,Q_0)}.$$

Так как в регулярных граничных точках множеств E_n (лежащих внутри сферы $PQ_0 = r(\varepsilon)$) функция $V_{\rho,p}(P)$ имеет предельные значения, равные единице, то в силу принципа максимума получим

$$1 - \varepsilon - \frac{1}{2^p C_1(Q_0)} \cdot \max_{PQ_0 = r(\varepsilon)} \frac{1}{\rho(P,Q_0)} < V_{\rho,p}(Q_0)$$

при всех достаточно больших p. Следовательно

$$1 - \varepsilon < \lim_{p\to\infty} V_{\rho,p}(Q_0)$$

откуда, в силу произвольности ε, следует

$$\lim_{p \to \infty} V_{\rho, p}(Q_0) = 1 .$$

Достаточность условия доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы задача Дирихле для уравнения (1) была устойчивой в замкнутой области $\overline{D}$, необходимо и достаточно, чтобы каждая граничная точка D была точкой устойчивости.

Необходимость условия очевидна.

Докажем достаточность.

Итак имеем, что какова бы ни была непрерывная функция f, заданная на границе Γ области $\overline{D}$, в каждой граничной точке Q

$$\lim_{n \to \infty} U_{n, f}(Q) = f(Q) .$$

Покажем, что сходимость на границе равномерна. Продолжим f непрерывно на область S и найдем полином $\pi(P)$, удовлетворяющий неравенству

$$| f(P) - \pi(P) | < \varepsilon$$

внутри области S.

Полином $\pi(P)$ можно представить в виде разности 2-х функций $\pi(P) = \pi_1(P) - \pi_2(P)$ таких, что

$$L(\pi_1) < 0, \qquad L(\pi_2) < 0 \quad \text{внутри } S .$$

Здесь L есть правая часть уравнения (1).

Тогда последовательности $\{U_{n, \pi_1}\}$, $\{U_{n, \pi_2}\}$ будут монотонно возрастающими и на всей границе Γ будут сходиться к непрерывным функциям π_1 и π_2 соответственно.

Следовательно, по известной теореме, сходимость этих последовательностей будет равномерной.

Тогда при $n > N(\varepsilon)$ ($N(\varepsilon)$ не зависит от Q).

$$| U_{n, \pi}(Q) - \pi(Q) | < \varepsilon .$$

Но в силу принципа максимума

$$| U_{n, \pi}(Q) - U_{n, f}(Q) | < \varepsilon \text{ при всех } n.$$

Следовательно,

$$| U_{n, f}(Q) - f(Q) | \leqslant | U_{n, \pi}(Q) - U_{n, f}(Q) | + | U_{n, \pi}(Q) - \pi(Q) | +$$
$$+ | \pi(Q) - f(Q) | < 3\varepsilon .$$

При $n > N(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ не зависит от Q.

Теорема доказана.

Сопоставляя теоремы 1 и 2, заключаем, что если задача Дирихле устойчива в данной замкнутой области для некоторого уравнения вида (1), то она будет устойчивой в той же замкнутой области для любого уравнения этого класса.

Приведенные результаты легко распространяются на случай n измерений ($n > 3$).

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Վ.-Կ. Ի. ԿԱՐԱԲԵԳՈՎ

Փակ տիրույթում գծային էլիպտիկ հավասարումների համար, Դիրիխլեի խնդրի կայունության մասին

Հոդվածում հետազոտվում է փակ տիրույթում Դիրիխլեի պրոբլեմի կայունության հարցը ողորկ գործակիցներով, գծային, էլիպտիկ հավասարումների համար՝

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \qquad (1)$$

Ապացուցվում է, որ տիրույթի եզրային կետը հանդիսանում է (1) տիպի հավասարման համար կայունության կետ միայն այն ժամանակ, երբ նա հանդիսանում է կայունության կետ Լապլասի հավասարման համար (թեորեմ 1)։

Օգտվելով 1 թեորեմից հաջողվում է ապացուցել, որ Դիրիխլեի պրոբլեմը (1) հավասարման համար (ցանկացած անընդհատ եզրային ֆունկցիայի դեպքում) տված փակ տիրույթում կլինի կայուն միայն այն ժամանակ, երբ նա կայուն է տված փակ տիրույթում Լապլասի հավասարման (և ցանկացած անընդհատ եզրային ֆունկցիայի) համար։