ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XVI 1953 2

МАТЕМАТИКА

Г. М. Миракьян

Об одном сходящемся процессе приближения непрерывных функций

(Представлено А. Л. Шагиняном 10 X 1952)

Содержание настоящей статьи дополняет результаты, полученные в [1] и [2], где речь шла о равноотстоящих узлах.

Составим последовательность из натуральных чисел:

$$m(m_1, m_2, \ldots m_\nu, \ldots) \tag{1}$$

$$\lim m = +\infty,$$

а также последовательность, элементы которой действительные положительные числа

$$n(n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots), \tag{2}$$

причем так, что

$$\lim \sqrt{\frac{m}{n}} = r > 0. \tag{3}$$

Можно выбирать последовательности (1) и (2) так, чтобы число r было равно любому действительному положительному числу.

В последующем используется хорошо известное разложение

$$e^{nx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k}, \tag{4}$$

где $\gamma_k = \frac{n^k}{k!}$. Это разложение справедливо (ограничиваясь действительными значениями x) при $-\infty < x < +\infty$. Обозначим через

$$A_{n,m}(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2}; \tag{5}$$

тогда полагая, что ρ любое действительное число из интервала $(0, r)$, легко доказать, что

$$\lim_{n \to \infty} A_{n,m}(x) = 0$$

равномерно относительно x в сегменте $[0, \rho]$.

Пусть $f(x)$ любая непрерывная в сегменте $[0, \rho]$ функция. Обозначим через $M = \max |f(x)|$ при $0 \leqslant x \leqslant \rho$.

После этого составим для функции $f(x)$ аппроксимирующие функции $\varphi_{m,n}(x)$ для системы неравноотстоящих узлов

$$0, \sqrt{\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{2}{n}}, \ldots, \sqrt{\frac{m}{n}}, \ldots$$

Полагаем

$$\varphi_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right). \tag{*}$$

Далее докажем, что функции $\varphi_{m,n}(x)$ в сегменте $[0, \rho]$ стремятся равномерно, при $n \to \infty$ к функции $f(x)$, которая продолжена вправо от точки $x = \rho$, следующим образом. Обозначим через $L = \sup \sqrt{\frac{m}{n}}$. Назовем через E множество тех точек сегмента $[\rho, L]$, которые имеют вид $\sqrt{\frac{m}{n}}$ и после этого продолжим функцию $f(x)$ на множество E так, чтобы, во-первых $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in E$ и, во-вторых, чтобы функция $f(x)$ была бы непрерывна справа в точке $x = \rho$ на множестве E.

Для того, чтобы точки вида $\sqrt{\frac{m}{n}}$ покрыли сетью весь сегмент $[0, \rho]$ предположим, что m и n настолько велики, что $\sqrt{\frac{m}{n}} > \rho$.

Воспользовавшись (4) и (5) представим разность $f(x) - \varphi_{m,n}(x)$ в виде

$$f(x) - \varphi_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} \left[f(x) - f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right] + f(x) A_{n,m}(x). \tag{7}$$

Используя равномерную непрерывность функции $f(x)$ в сегменте $[0, \rho]$, по всякому $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что как только для любых точек x_1 и x_{11} из сегмента $[0, \rho]$ выполнено неравенство $|x_1 - x_{11}| < \delta$, то справедливо неравенство

$$|f(x_1) - f(x_{11})| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, запишем неравенство (7) в виде

$$|f(x) - \varphi_{m,n}(x)| \leq P + Q + R, \tag{8}$$

где

$$P = \sum_{\left|x - \sqrt{\frac{k}{n}}\right| < \delta} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} \left|f(x) - f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\right|, \tag{9}$$

$$Q = \sum_{\left|x - \sqrt{\frac{k}{n}}\right| \geq \delta} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} \left| f(x) - f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \right|, \tag{10}$$

$$R = | f(x) | \cdot A_{n,m}(x). \tag{11}$$

Оценим сверху величины P, Q, R. Сначала имеем:

$$P < \sum_{\left|x - \sqrt{\frac{k}{n}}\right| < \delta} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12}$$

После этого оценим

$$R \leqq M \cdot A_{n,m}(x).$$

На основании (6) найдется такое n_0, чтобы при $n > n_0$ выполнялось неравенство

$$A_{n,m}(x) < \frac{3}{3M},$$

а потому

$$R < \frac{\varepsilon}{3} \tag{13}$$

при $n > n_0$ и сразу для всех $x \in [0, \rho]$.

Несколько сложнее оценивается Q. Так как

$\left| f(x) - f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right) \right| \leqq 2M$, то

$$Q \leqq 2M \sum_{\left|x - \sqrt{\frac{k}{n}}\right| \geq \delta} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2}.$$

Но из неравенства $\left| x - \sqrt{\frac{k}{n}} \right| \geqq \delta$ следует равносильное неравенство

$$\frac{nx^2 - 2x\sqrt{n} \cdot \sqrt{k} + k}{n\delta^2} \geqq 1, \tag{14}$$

а потому и подавно

$$Q \leq \frac{2M}{n\delta^2} \sum_{\left|x - \sqrt{\frac{k}{n}}\right| \geq \delta} \left(nx^2 - 2x\sqrt{n} \cdot \sqrt{k} + k\right) \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} \leq$$

$$\leq \frac{2M}{n\delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} (nx^2 - 2x\sqrt{n}\sqrt{k} + k)\gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} = \frac{2M}{n\delta^2} \times$$

$$\times \left[nx^2 e^{-nx^2} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^{2k} - 2x\sqrt{n}\, e^{-nx^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, \gamma_k x^{2k} + e^{-nx^2} \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma_k x^{2k} \right]. \quad (15)$$

Легко найдем из (4), что

$$nx^2 e^{nx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k\gamma_k x^{2k}. \quad (16)$$

Подстановка (4) и (16) в (15) дает

$$Q \leq \frac{4Mx^2}{\delta^2} \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, \gamma_k x^{2k}}{x\sqrt{n}\, e^{nx^2}} \right). \quad (17)$$

Далее найдем сумму ряда

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, \gamma_k x^{2k} = nx^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx^2)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (18)$$

Пользуясь равенством

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ky^2} dy$$

получим, используя теорему о почленном интегрировании ряда

$$S = \frac{2nx^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(nx^2)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-ky^2} = \frac{2nx^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-y^2} e^{nx^2 e^{-y^2}} dy. \quad (19)$$

Таким образом, сумма ряда (18) найдена в виде определенного интеграла.

После этого, пользуясь формулой Лапласа ([3]) найдем асимптотическое значение интеграла в правой части (19).

В результате этого получаем асимптотическое равенство при $n \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{nx^2 e^{-y^2}} dy \sim \frac{e^{nx^2}}{x} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Отсюда и из (19) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\, \gamma_k x^{2k} \sim x\sqrt{n}\, e^{nx^2}. \quad (20)$$

На основании (20) можно указать такое натуральное число n_*, что при $n > n_*$ выполняется неравенство

$$0 < 1 - \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sqrt{k}\,\gamma_k x^{2k}}{x\sqrt{n}\,e^{nx^2}} < \frac{\varepsilon \cdot \delta^2}{12 M \rho^2}, \tag{21}$$

а тогда при $n > n_*$ из (21) и (17) получаем

$$Q < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{x^2}{\rho^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{21a}$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant \rho$. Обозначая через $N = \max\ (n_0, n_*)$, получим из (8), (12), (13). (21a), что при $n > N$

$$|\,(fx) - \varphi_{m,n}(x)\,| < \varepsilon,$$

если $0 \leqslant x \leqslant \rho$. Отметим также, что функции, построенные аналогично функциям (*), но для равностоящих узлов, не обладают свойством аппроксимировать любую непрерывную функцию.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Գ. Մ. ՄԻՐԱՔՅԱՆ

Անընդհատ ֆունկցիաների մոտավորության մի զուգամետ եղանակի մասին

Հոդվածում դիտվում են $m\ (m_1, m_2, \ldots m_v, \ldots)$ *բնական և* $n\ (n_1, n_2 \ldots n_v \ldots)$ *դրական իրական թվերի երկու հաջորդականություններ այնպես որ* $\lim \frac{m}{n} = r > 0.$

Ապացուցված է, որ $(0, \rho)$ *սեգմենտում, որտեղ* $0 < \rho < r$, *յուրաքանչյուր անընդհատ* $f(x)$ *ֆունկցիան կարելի է հավասարաչափ մոտարկել*

$$\varphi_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k x^{2k} e^{-nx^2} f\left(\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$$ *ֆունկցիաներով, որտեղ* $\gamma_k = \frac{n^k}{k!}$ ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. М. Миракьян*, ДАН СССР, XXXI, № 3 (1941). [2] *Г. М. Миракьян*, ДАН СССР, L, № 2 (1946). [3] *Поли* и *Сеге*, Задачи и теоремы из анализа (1937). ч. I, стр. 104, задача № 201.