ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XV 1952 3

ГИДРОМЕХАНИКА

Л. А. Оганесян

О поперечной циркуляции в напорной трубе на ее повороте

(Представлено И. В. Егиазаровым 25 IV 1952)

В предлагаемой статье поставлена задача о поперечной циркуляции в водоводе на его повороте в предположении больших радиусов кривизны линии закругления.

В основу приняты уравнения диффузионной теории турбулентности ([2]), которые, следуя идее А. К. Ананяна[1], для случая поперечной циркуляции в водоводе, удается упростить; для частного вида водовода—круглой трубы, можно получить обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Для логарифмического и эллиптического (по Караушеву) распределения продольных скоростей это уравнение приводится к уравнению Гаусса.

В отличие от работы А. К. Ананяна, где решается уравнение как в турбулентной, так и ламинарной зонах, в статье сделана попытка учесть влияние ламинарного подслоя в граничных условиях.

А. К. Ананяном принято упрощающее предположение о постоянстве коэффициента турбулентного перемешивания.

I. а) *Упрощения уравнений.* Предположим, что при больших радиусах кривизны:

1) циркуляционные компоненты $O\left(\frac{1}{R}\right)$ $\left(\text{будем обозначать } O\left(\frac{1}{R}\right)\right.$ величины порядка $\left.\frac{1}{R}\right)$;

2) изменение по длине циркуляционных компонент $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$;

3) коэффициент турбулентного перемешивания с точностью до $O\left(\frac{1}{R}\right)$ зависит от продольных скоростей;

[1] Эта идея изложена в неопубликованной диссертации А. К. Ананяна, любезно им предоставленной автору.

4) продольные скорости с точностью до $O\left(\frac{1}{R}\right)$ равны скоростям в призматическом водоводе.

Будем пренебрегать $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ по сравнению с $O\left(\frac{1}{R}\right)$.

В качестве криволинейных координат примем:

1) кривые s, равноудаленные от оси водовода;

2) кривые n, ортогональные к s,

3) ось y, направленную вертикально вверх.

Уравнение кривой, „параллельной“ оси водовода

$$Y(x - h\sin\varphi = y(x) + h\cos\varphi.$$

Здесь h — расстояние между „параллелями“

$$\varphi = \operatorname{arctg} y' = \frac{x}{R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2R} + O\left(\frac{1}{R^2}\right),$$

$$Y(u) = \frac{u^2}{2R} + h + O\left(\frac{1}{R^2}\right).$$

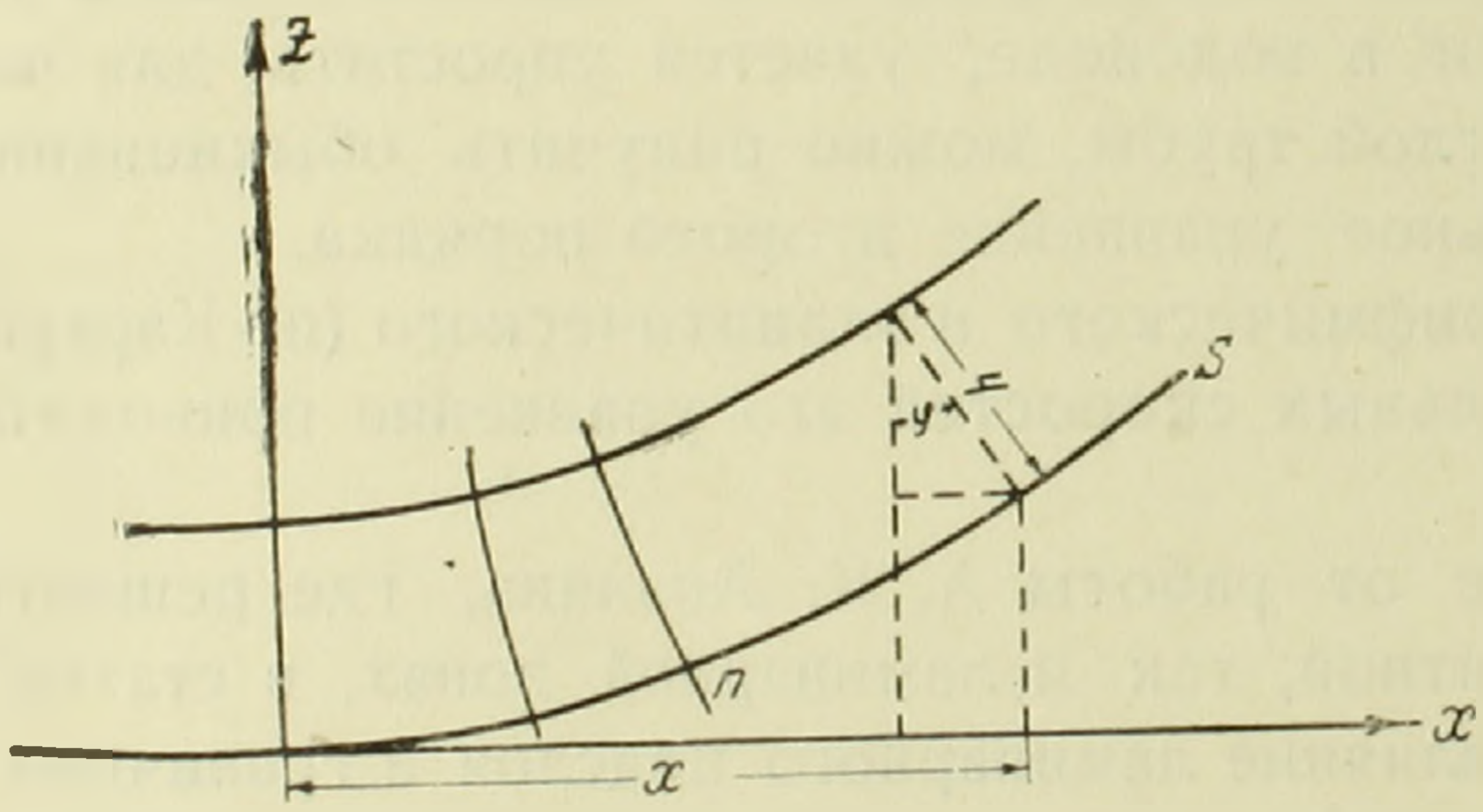

Рис. 1.

Из этого равенства следует, что в окрестности точки O кривые можно заменить, с точностью до $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, семейством окружностей с радиусом кривизны оси водовода R_0.

Поэтому возможен переход к полярным координатам.

Записав уравнение в полярных координатах ([1]) и заменив r через $R_0 + x$, получим:

$$O = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{v_s^2}{R}, \qquad (1)$$

$$O = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (2)$$

$$O = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}. \qquad (3)$$

При этом из (3) следует существование такого $F(x,y)$, при котором

$$v_x = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Поставив v_x и v_y в уравнения (1), (2), продифференцировав (1) по y и (2) по x и вычтя их друг от друга, получим для $F(x,y)$ уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ 4\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(A\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) = f.$$

б) *Граничные условия.* Делаем следующие допущения.

1. Между стенкой и областью турбулентности существует тонкий ламинарный подслой (пленка).

2. На границе между пленкой и областью турбулентности скорости и напряжения по одну и другую сторону границы одинаковы. Если не существует резко очерченной границы, то это условие можно сформулировать так: предельные значения скоростей и напряжений, при подходе из турбулентной области к переходной зоне, и предельные значения тех же величин, при подходе из ламинарной зоны, совпадают (или близки, т. е. не терпят скачка).

3. Граница пленки „параллельна“ стенке, т. е. отклонение нормали к границе от нормали к стенке в точке пересечения первой нормали со стенкой есть $O(\delta)$, где δ толщина ламинарного подслоя.

Изменение градиента скорости в толще ламинарного слоя $O\left(\frac{1}{\delta}\right)$ (это положение можно обосновать исходя из уравнения (1) рассуждением, аналогичным рассуждениям при оценке порядка величин, приводимых в теории ламинарного пограничного слоя).

Обозначим через ω в ламинарном слое такую функцию, что

$$v_x = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Разложим ω в строку Тейлора по направлению нормали к границе пленки, в точке на границе пленки.

Тогда:

$$\omega(\bar{S}) = \omega(S) + \delta\frac{\partial \omega(S)}{\partial n} + o(\delta).$$

Так как на границе $\omega(\bar{S}) = 0$ (ввиду прилипания частиц), то $\omega(S) \sim O(\delta)$.

Поэтому будем считать $\omega(S) = 0$.

Разложив $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ в строку Тейлора

$$\frac{\partial\omega(\bar{S})}{\partial n} = \frac{\partial\omega(S)}{\partial n} + \delta\,\frac{\partial^2\omega}{\partial n^2} + o(\delta)\,,$$

где $o(\delta)$ — обозначает величину, стремящуюся к нулю при $\delta \to 0$.

При $\bar{S} \to S_1$ имеем $\dfrac{\partial\omega(\bar{S})}{\partial n} = \nabla\omega(\bar{S})\cdot\vec{n} = \nabla\omega(\bar{S})\cdot\vec{n}_1 + O(\delta)$, где n нормаль к стенке.

Имеем, откидывая $O(\delta)$,

$$\delta\,\frac{\partial^2\omega(S)}{\partial n^2} + \frac{\partial\omega(S)}{\partial n} = 0\,,$$

$$\delta\,\frac{\partial^2\omega(S)}{\partial n^2} = \frac{\delta\tau_{ns}^{(л)}}{\mu} + O(\delta).$$

Ввиду равенства напряжений и касательных составляющих скоростей имеем (учитывая выражение τ_{ns} в криволинейных координатах)

$$\frac{\tau_{ns}^{(л)}}{\mu} = \frac{\tau_{ns}^{(т)}}{\mu} = \frac{A}{\mu}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} - \frac{1}{r_0}\,\frac{\partial F}{\partial n}\right),$$

r_0 радиус кривизны границы поперечного сечения.

Итак, граничное условие

$$\delta\,\frac{A}{\mu}\,\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \frac{\partial F}{\partial n}\left(1 - \frac{A\delta}{\mu r_0}\right) = 0\,.$$

Отметим, что В. М. Маккавеев получил граничные условия такого же типа, а именно:

$$l\,\frac{\partial^2 F}{\partial n^2} + \frac{\partial F}{\partial n} = 0\,,$$

где l длина пути перемешивания.

Второе граничное условие получим следующим образом:

Из условия равенства нулю расхода получаем для любого замкнутого контура L $\displaystyle\int\limits_L v_n\,dl = 0$.

Возьмем замкнутый контур прилегающим с обеих сторон к границе подслоя. Тогда получим:

$$\int\limits_{l_1}\frac{dF}{dl}\,dl = \int\limits_{l_2}\frac{d\omega}{dl}\,dl,$$

где l_1 и l_2 части контура, лежащие в ламинарном и турбулентном слоях.

Отсюда $F(S_1) - F(S) = o(\delta)$.

Так как F выбирается с точностью до произвольной постоянной, то возьмем $F(S_1) = 0$.

Тогда $F(S) \sim O(\delta)$.

На этом основании можно принять $F(S) = 0$.

Это второе граничное условие.

II. Будем решать задачу о поперечной циркуляции в круглой трубе.

Перейдем в уравнениях (1), (2) и (3) к полярным координатам [1]. Получим:

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+2\frac{\tau_{rr}}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}=-F_r\,, \tag{1'}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \varphi}+2\frac{\tau_{r\varphi}}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}=-F_\varphi\,, \tag{2'}$$

$$\tau_{rr}+\tau_{\varphi\varphi}=0\,. \tag{3'}$$

Здесь [2]

$$\tau_{rr}=2A\frac{\partial v_r}{\partial r}\,;\ \tau_{r\varphi}=A\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r}\right);\ \tau_{\varphi\varphi}=2A\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{v_r}{r}\right) \tag{4}$$

Причем последнее уравнение дает

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}=0\,,$$

т. е. существует такое F, при котором

$$r v_r=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\,;\ v_\varphi=-\frac{\partial F}{\partial r}\,.$$

Будем искать функцию F в виде

$$F(r,\varphi)=f(r)\cdot\cos\varphi.$$

Подставляя это выражение в (4), получим;

$$\tau_{rr}=2A\chi\cdot\sin\varphi,$$

$$\tau_{\varphi\varphi}=-2A\chi\cdot\sin\varphi,$$

$$\tau_{r\varphi}=A\frac{d}{dr}(r\chi)\cdot\cos\varphi,$$

где

$$\chi=\frac{d}{dr}\left(\frac{f}{r}\right).$$

Исключим P приемом, предложенным А. К. Ананяном.

Уравнение (1′) продифференцируем по φ, а (2′) по r, предварительно умножив на r. Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(r^2\tau_{rr})}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2(r^2\tau_{r\varphi})}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2\tau_{r\varphi})}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{rr})}{\partial\varphi}=$$

$$=\frac{\partial F_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial r F_\varphi}{\partial r}=\chi.$$

Так как $$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial(r^2\tau_{rr})}{\partial r}-\frac{2r^2\tau_{rr}}{r^3}\right)=\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{2}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r}\,,$$

то $$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{2}{r}\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r}-\frac{r^2\tau_{r\varphi}}{r^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi})-\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\tau_{r\varphi})=$$

$$= \frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{r\varphi}) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r^2\tau_{r\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[2\frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial \varphi}\right] +$$

$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau_{r\varphi})}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi}).$$

Умножая на r и интегрируя, имеем:

$$2\frac{\partial}{\partial \varphi}(r\tau_{rr}) + r\tau_{r\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi}) = \int \chi \cdot r \cdot dr + C.$$

Сократив на $\sin\varphi$, получим:

$$4A\chi r - r\frac{d}{dr}Ar\frac{d}{dr}r\chi = 4AY - r\frac{d}{dr}Ar\frac{d}{dr}Y = \psi. \qquad (5)$$

Это уравнение второго порядка.

Здесь $$\psi = \frac{1}{R}\int r\left[v^2 - r\frac{dv^2}{dr}\right]dr + C.$$

Примем логарифмический закон распределения продольных скоростей, $v = C_1 \ln(1-r) + C_2$.

При этом $$A = -\frac{\tau}{\frac{dv}{dr}} = \frac{g_1\gamma^r(1-r)}{2C_1}.$$

Подставив значение A в уравнение (5), получим:

$$r^3(r-1)Y'' + (3r^3 - 2r^2)Y' + 4(r^2 - r)Y = f.$$

Здесь $\frac{f}{r^2}$ — конечная величина.

Это уравнение Гаусса ([3]).

При распределении по Караушеву $v = v_0 \cdot \sqrt{1 - pr^2}$ из уравнения ([3]) после замены $pr^2 = \zeta$ получим уравнение Гаусса

$$Y'' - \frac{3\zeta - 2}{2\zeta(1-\zeta)}Y' - \frac{1}{\zeta^2}Y = \bar{f}.$$

Լ. Հ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Ընդլայնական ցիրկուլյացիայի մասին ճնշման խողովակի ոլորման դեպքում

Այս հոդվածում դրված է ընդլայնական ցիրկուլյացիայի խնդիրը կամայական ձևի ընդլայնական կտրվածք ունեցող ջրատարի ոլորման դեպքում, երբ ոլորումը տեղի է ունենում կամայական, մեծ կորության շառավիղներ ունեցող կորով։

Հիմք են ընդունված տուրբուլենտության դիֆուզիոն թեորիայի հավասարումները։ Հետևելով Ա. Կ. Անանյանի իդեային, հաջողվում է պարզեցնել այդ հավասարումները, իսկ կլոր ընդլայնական կտրվածքով խողովակի համար ստանալ հետևյալ երկրորդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարումը։

$$4AY - r\frac{d}{dr}Ar\frac{d}{dr}Y = \psi$$

Որտեղ A — տուրբուլենտ—մածուցիկության գործակիցն է։

Ընդերկայնական արագությունների բաշխման լոգարիթմական և էլիպտական (ըստ Ա. Ն. Կարաուշևի) օրենքների ընդունման դեպքում այդ հավասարումը բերվում է Գաուսի հավասարման։

Ի տարբերություն Ա. Կ. Անանյանի, որը տուրբուլենտ և լամինար զոնաների անջատ լուծումները կցել է սահմանային շերտի վրա, այստեղ լամինար շերտի ազդեցությունը հաշվի է առնված սահմանային պայմաններում։

Տուրբուլենտ մածուցիկության գործակիցը Ա. Կ. Անանյանի կողմից ընդունված է հաստատուն, իսկ այստեղ ընդունված է դիֆուզիոն թեորիայի հավասարումներից ստացված բանաձևը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Е. Кочин*, Векторное исчисление и начало тензорного исчисления, 1938. [2] *В. М. Маккавеев* и *И. М. Коновалов*, Гидравлика, 1940. [3] *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. III, 1938.