

Г. С. Саакян

Торможение крайне релятивистских электронов на протонах

(Представлено В. А. Амбарцумяном 10 X 1951)

1. Если электрон, энергия которого сравнима с энергией покоя протона или больше его, сталкиваясь с протоном, рассеивается под большим углом, то находящийся вначале в покое протон приобретет кинетическую энергию, сравнимую по своей величине с энергией покоя протона. Вследствие этого неправильно, как это делается обычно, считать массу протона бесконечной.

В таких процессах обе частицы после столкновения приобретут скорости, сравнимые со скоростью света, поэтому в их кулоновском взаимодействии необходимо принять во внимание эффект запаздывания. Кроме того, при вычислении вероятности тормозного излучения надо учесть, что протон, получив большое ускорение, также может излучать.

Целью этой работы является вычисление дифференциального поперечного сечения тормозного излучения электронов высокой энергии на протонах с учетом эффекта запаздывания и возможности излучения фотонов протонами.

Итак, нам предстоит решить следующую задачу: вычислить дифференциальное поперечное сечение процесса, при котором электрон и протон с импульсами, равными, соответственно, $\vec{p}$ и $\vec{P}_0 = 0$, сталкиваясь переходят в конечное состояние с импульсами, равными, соответственно, $\vec{p}$ и $\vec{P}$, и при этом излучается фотон с импульсом, равным $\vec{K}$.

Оператор энергии взаимодействия, вызывающий такой переход, равен

$$H = H^e + H^p + V, \quad (1)$$

где H^e — есть оператор энергии взаимодействия электрона с полем излучения

$$H^e = -e (\vec{x} \vec{A}); \quad (2)$$

$\vec{\alpha}$ — матричный вектор Дирака для электрона;

H^p — есть оператор энергии взаимодействия протона с полем излучения⁽¹⁾.

$$H^p = -e (\vec{\delta} \vec{A}) + il\gamma (F_{23}\delta_2\delta_3 + F_{31}\delta_3\delta_1 + F_{12}\delta_1\delta_2) - i \frac{l}{c} \gamma \left(\vec{\delta} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad (3)$$

где γ и $\vec{\delta}$ — дираковские матрицы для протона, l — дополнительный магнитный момент протона, $\vec{A}$ — вектор потенциального поля излучения, а F_{ik} — тензор электромагнитного поля. Наконец, V есть энергия кулоновского взаимодействия.

Описанный процесс совершается посредством шестнадцати различных основных цепочек переходов, вместо двух для тормозного излучения электронов на неподвижном кулоновском центре сил.

В самом деле, число цепочек, описывающих излучение электрона, учетверится благодаря учету запаздывающего взаимодействия, вследствие чего получится 8 основных цепочек, и, наконец, это число удвоится за счет излучения протона.

Обозначим через q импульс, передаваемый протону. Тогда из законов сохранения энергии импульса

$$\begin{aligned} E_0 + W_0 &= E + W + K, \\ \vec{P}_0 + \vec{p}_0 &= \vec{P} + \vec{p} + \vec{K}, \end{aligned} \quad (4)$$

следует:

$$\vec{q} = \vec{P} - \vec{P}_0 = \vec{P} = \vec{p}_0 - \vec{p} - \vec{K}, \quad (5)$$

где через W_0 обозначена энергия начального состояния, а через W — энергия конечного состояния протона. Мы предполагаем, что протон вначале покоится, поэтому $W_0 = M$, где M есть энергия покоя протона. E_0 и E — энергии начального и конечного состояний электрона, а K — энергия фотона.

Последние два слагаемых в (3) изображают оператор энергии взаимодействия сверхспинового магнитного момента протона с полем излучения. Вероятность перехода, обусловленная этим оператором, значительно меньше вероятности того же перехода, обусловленного первым членом в (3)⁽²⁾; поэтому ниже мы не учитываем эти слагаемые и принимаем за оператор взаимодействия протона с полем излучения выражение

$$H^p = -e (\vec{\delta} \vec{A}). \quad (3)$$

2. Как было указано выше, переход из начального состояния в конечное совершается посредством шестнадцати цепочек. Но нетрудно понять, что из них существенны только те, в которых излучателем фотона K является электрон, тогда как цепочки, в которых

излучателем фотона K является протон, не играют никакой роли в рассматриваемом процессе. К такому заключению можно прийти и из классического рассмотрения вопроса. Действительно, согласно классической теории количество лучистой энергии, излученной ускоренной заряженной частицей, пропорционально квадрату ускорения, и следовательно, при заданном кулоновском притяжении между электроном и протоном, оно обратно пропорционально квадрату масс каждой из этих частиц. Поэтому количество лучистой энергии, излученной протоном, будет примерно в $\frac{M^2}{\mu^2}$ раз меньше (μ —энергия покоя электрона), чем излучение электрона.

В правильности приведенных доводов мы убедились и непосредственным квантомеханическим расчетом. При вычислении вероятности перехода появятся и интерференционные члены, т. е. члены, где будут присутствовать матричные элементы, соответствующие излучению и электрона и протона.

Эти члены будут примерно в $\frac{M}{\mu}$ раз меньше по сравнению с членами, описывающими лишь излучение электрона. На основании приведенных рассуждений излучение протона не будем учитывать.

Матричные элементы энергии взаимодействия электрона и протона с полем излучения равны, соответственно ⁽³⁾:

$$H_{mn}^e = e \sqrt{\frac{2\pi h^2 c^2}{K}} (U_m^x \alpha_k U_n); \quad H_{mn}^p = -e \sqrt{\frac{2\pi h^2 c^2}{K}} (\psi_m^x \delta_k \psi_n), \quad (6)$$

где α_k и δ_k — компоненты матричных векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\delta}$ на направлении поляризации фотона; U и ψ — дираковские амплитуды, соответственно, для электрона и протона*. Матричный элемент кулоновского взаимодействия определяется формулой ⁽³⁾:

$$V_{mn} = \frac{4\pi^2 h^2 c^2 e^2}{q^2} (U_m^x U_n) (\psi_m^x \psi_n). \quad (7)$$

Используя (6) и (7), получим общий матричный элемент перехода из начального состояния в конечное

$$\begin{aligned} H_{AF} = & -e^3 \sqrt{\frac{2\pi h^2 c^2}{K}} \cdot \frac{4\pi^2 h^2 c^2}{q^2} \sum \left\{ \frac{(U_0^x \alpha_k U_1) (U_1^x U) (\psi_0^x \psi)}{E_0 - E_1 - K} + \right. \\ & + \frac{(U_0^x U_2) (U_2^x \alpha_k U) (\psi_0^x \psi)}{E + K - E_2} + \frac{q}{2} S_q \left[\frac{(U_0^x \alpha_k U_1) (U_1^x \alpha_q U) (\psi_0^x \delta_q \psi)}{(E_0 - K - E_1)(W - W_0 - q)} + \right. \\ & + \frac{(U_0^x \alpha_k U_1) (\psi_0^x \delta_q \psi) (U_1^x \alpha_q U)}{(E_0 - K - E_1)(E - E_1 - q)} + \frac{(U_0^x \alpha_q U_2) (U_2^x \alpha_k U) (\psi_0^x \delta_q \psi)}{(E_0 - E_2 - q)(W - W_0 - q)} + \\ & + \frac{(\psi_0^x \delta_q \psi) (U_0^x \alpha_k U_1) (U_1^x \alpha_q U)}{(W_0 - W - q)(E - E_1 - q)} + \frac{(U_0^x \alpha_q U_2) (\psi_0^x \delta_q \psi) (U_2^x \alpha_k U)}{(E_0 - E_2 - q)(E + K - E_2)} + \\ & \left. + \frac{(\psi_0^x \delta_q \psi) (U_0^x \alpha_q U_2) (U_2^x \alpha_k U)}{(W_0 - W - q)(E + K - E_2)} \right] \Big\}, \quad (8) \end{aligned}$$

* Здесь и в дальнейших формулах под h подразумевается постоянная Планка, деленная на 2π .

где α и δ с индексами означают компоненты матричных векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\delta}$ на направлении поляризаций фотонов $\vec{K}$ и $\vec{q}$; S_q — означает суммирование по обоим направлениям поляризации виртуального фотона q , осуществляющего запаздывающее взаимодействие; Σ — означает суммирование по всем четырем промежуточным состояниям электрона с одним и тем же импульсом $\vec{p}_1 = \vec{p}_0 - \vec{K}$ или $\vec{p}_2 = \vec{p} + \vec{K} = \vec{p}_0 - \vec{q}$; E_0, E_1, E_2, E и W_0, W_1, W_2, W — означают энергии электрона и протона, соответственно, для начального, промежуточных и конечного состояний.

После суммирования по поляризациям обменных квантов и по всем промежуточным состояниям электрона получим:

$$H_{AF} = -e^3 \sqrt{\frac{2\pi h^2 c^2}{K} \frac{4\pi^2 h^2 c^2}{N}} \left\{ \left[\frac{(U_0^x \alpha_k K_1 U)}{(E_0 - K)^2 - E_1^2} + \frac{(U_0^x K_2 \alpha_k U)}{(E + K)^2 - E_2^2} \right] (\psi_0^x \psi) - \left[\frac{(U_0^x \alpha_k K_1 \vec{\alpha} U)}{(E_0 - K)^2 - E_1^2} + \frac{(U_0^x \vec{\alpha} K_2 \alpha_k U)}{(E + K)^2 - E_2^2} \right] (\psi_0^x \vec{\delta} \psi) \right\}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} N &= (\vec{p}_0 - \vec{p})^2 - (W_0 - W)^2 = q^2 - (W - M)^2, \\ K_1 &= E_0 - K + H_1 = E_0 - K + (\vec{\alpha} \vec{p}_0) - (\vec{\alpha} \vec{K}) + \mu\beta, \\ K_2 &= E + K + H_2 = E + K + (\vec{\alpha} \vec{p}) + (\vec{\alpha} \vec{K}) + \mu\beta. \end{aligned} \quad (10)$$

Вероятность перехода в единицу времени определяется формулой:

$$\omega = \frac{2\pi}{h} |H_{AF}|^2 \rho_F, \quad (11)$$

где ρ_F — плотность числа конечных состояний. Учитывая (4), нетрудно определить ρ_F :

$$\rho_F = A \cdot \frac{K^2 d K p E}{(2\pi h c)^6} d\Omega \cdot d\Omega_k, \quad (12)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла, в который отклоняется электрон; $d\Omega_k$ — элемент телесного угла, внутри которого движется фотон.

A — некоторый множитель порядка единицы

$$\begin{aligned} A &= \left[1 + \frac{p + K \cos \vartheta - p_0 (\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_0 \cdot \cos \varphi)}{W' \cdot \frac{p}{E}} \right]^{-1} = \\ &= \left[1 + \frac{E + K \cos \vartheta - E_0 (\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{W} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Углы считаются от направления распространения фотона.

Так, ϑ есть угол между векторами $\vec{K}$ и $\vec{p}$; ϑ_0 — между $\vec{K}$ и $\vec{p}_0$ и φ — угол между плоскостями $(\vec{p}, \vec{K})$ и $(\vec{p}_0, \vec{K})$.

Для малых углов ϑ и ϑ_0 , а также при малых энергиях E_0 , но для любых углов, $A = 1$. При больших углах $A \approx \frac{W}{M+E_0} < 1$, так,

например, при $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0$.

$$A = \left(1 + \frac{E+K}{W}\right)^{-1} = \frac{W}{M+E_0}.$$

Как видно из последнего выражения, численное значение A всегда порядка единицы.

Из (9), (11), (12) общеизвестным способом находим дифференциальное поперечное сечение

$$\begin{aligned} d\Phi = & \frac{e^6}{4\pi \cdot hc} A \cdot \frac{p}{p_0} \frac{M+W}{W N^2} \cdot \frac{dK}{K} \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 d\vartheta d\vartheta_0 d\varphi \left[\left\{ \frac{p^2 \sin^2\vartheta}{U^2} [(E_0+E+K)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - P^2] + \frac{p_0^2 \sin^2\vartheta_0}{U_0^2} [(E_0+E-K)^2 - P^2] - \frac{2pp_0 \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi}{U \cdot U_0} [4EE_0 - P^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + K^2 + (E_0-E)^2] + 2K^2 \frac{p^2 \sin^2\vartheta + p_0^2 \sin^2\vartheta_0}{U U_0} \right\} + \frac{2p^2 \sin^2\vartheta}{U^2} \left\{ \frac{W-M}{W+M} [3EE_0 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3E_0K - (\vec{p} \vec{p}_0) - Kp_0 \cos\vartheta_0 - 3\mu^2] - 2 \frac{E_0(\vec{p} \vec{P}) + (E_0+K)(\vec{p}_0 \vec{P}) + E_0KP \cos\alpha}{M+W} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{2p_0^2 \sin^2\vartheta_0}{U_0^2} \left\{ \frac{W-M}{W+M} [3EE_0 - 3EK - (\vec{p} \vec{p}_0) + pK \cos\vartheta - 3\mu^2] - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{E(\vec{p}_0 \vec{P}) + (E_0-K)(\vec{p} \vec{P}) - EKP \cos\alpha}{M+W} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{4pp_0 \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi}{U U_0} \left\{ \frac{(2E+K)(\vec{p}_0 \vec{P}) + (2E_0-K)(\vec{p} \vec{P}) + K(E_0-E)P \cos\alpha}{M+W} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{W-M}{W+M} [3EE_0 - (\vec{p} \vec{p}_0) + K(E_0-E) - 3\mu^2] \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{2K}{U} \left\{ \frac{W-M}{W+M} [3E_0K - Kp \cos\vartheta_0 - p^2 \cdot \sin^2\vartheta - 2pp_0 \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi] - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \frac{(2E+E_0) [(\vec{p} \vec{P}) - pP \cos\vartheta \cdot \cos\alpha] + KE_0P \cos\alpha + K(\vec{p}_0 \vec{P})}{M+W} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{2K}{U_0} \left\{ \frac{W-M}{M+W} [3EK - Kp \cos\vartheta + p_0^2 \sin^2\vartheta_0 + 2pp_0 \sin\vartheta \cdot \sin\vartheta_0 \cdot \cos\varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{(2E_0+E) [(\vec{p}_0 \vec{P}) - p_0P \cos\vartheta_0 \cdot \cos\alpha] - KEP \cos\alpha - K(\vec{p} \vec{P})}{M+W} \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{4K^2\mu^2}{U U_0} \left\{ \frac{2P \cos\alpha}{M+W} - \frac{W-M}{W+M} \right\} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{где } U = E - p \cos \vartheta; \quad U_0 = E_0 - p_0 \cos \vartheta_0,$$

α есть угол между векторами $\vec{P}$ и $\vec{K}$, а

$$P^2 = p_0^2 + p^2 + K^2 - 2p_0 K \cos \vartheta_0 + 2p K \cos \vartheta - 2pp_0 (\cos \vartheta \cdot \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \cdot \sin \vartheta_0 \cdot \cos \varphi).$$

3. Если в (14) положить $P = 0$ (что равносильно предположению $M = \infty$), то в фигурных скобках останутся только первые четыре слагаемых, а остальные исчезнут; и если учесть, что в этом случае закон сохранения энергии напишется в виде $E_0 = E + K$, то эта формула точно совпадает с формулой Бете-Гейтлера⁽³⁾. Все остальные слагаемые в фигурных скобках, начиная с пятого до последнего, своим происхождением обязаны эффекту запаздывания. Если $P \ll M$ (что при больших ϑ_0 имеет место, если $E_0 \ll M$), то учет движения протона можно выразить в виде поправки к известному сечению $d\Phi_0$ ($d\Phi_0$ — есть дифференциальное поперечное сечение для протона с $M = \infty$); эта поправка будет порядка

$$\frac{P^2}{2ME_0} \cdot d\Phi_0 \ll d\Phi_0.$$

При больших отбоях $\vec{P}$ протона, т.е. $P \gtrsim M$ дифференциальное сечение $d\Phi$ отличается от $d\Phi_0$, и это отличие обусловлено не только эффектом запаздывания, но и множителем $\frac{M+W}{2W}$ (появление которого обусловлено законом сохранения энергии: $E_0 + M = E + W + K$).

Этот множитель удовлетворяет неравенству: $0,5 \leq \frac{M+W}{2W} \leq 1$, причем он стремится к своему нижнему пределу при $M \ll W$, а к верхнему при $P = 0$ (т.е. при $E_0 = E + K$, что равносильно $M = \infty$).

При заданном K переданный протону наименьший импульс определяется формулой⁽⁴⁾:

$$P_{\min} = \sqrt{E_0^2 + K^2 - 2E_0 K \cos \vartheta_0} - E. \quad (15)$$

При малых углах $P_{\min} \approx E_0 - K - E$ очень мало и (14) совпадает с сечением для протона с $M = \infty$; наоборот, при больших углах ϑ_0 , если $E_0 \gtrsim M$, обязательно нужно учесть конечную величину массы протона. Так, например, при $E_0 \gtrsim M$ и $\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$P_{\min} = \sqrt{E_0^2 + K^2} - E$$

и может оказаться по своей величине сравнимой или даже больше M ; тогда мы уже не имеем права пользоваться формулой Бете-Гейтлера, и вступает в силу формула (14), которая, таким образом, имеет смысл только для больших углов рассеяния электронов.

Ясно, что полное поперечное сечение тормозного излучения совершенно не изменится. Это связано с тем, что полное попереч-

ное сечение образуется в основном за счет малых углов рассеяния электрона (т. е. за счет параметров удара больших, чем радиус ядра), тогда как вклад больших углов рассеяния в полное поперечное сечение ничтожно мал.

Несколько слов относительно тормозного излучения электронов очень высокой энергии на ядрах. При энергиях фотонов

$$K \gg \frac{hc}{R},$$

где R — радиус ядра, торможение электронов происходит не в поле всего ядра, как целого, а на отдельных протонах (и отчасти на нейтронах), составляющих его⁽⁴⁾. При этом электрон и фотон вылетают под большими углами $\left(\vartheta_0 \sim \frac{\pi}{2}; \vartheta \sim 0 \right)$. Причиной этого является

то, что эффективный параметр удара в таких процессах меньше радиуса ядра. Поэтому соответствующую формулу для ядер можно получить из (14), если умножить ее на Z .

Вышеизложенное относится и к вопросу рождения пар электрон-позитрон фотонами очень высокой энергии ($K \geq M$).

Дифференциальное поперечное сечение этого процесса, когда и электрон и позитрон вылетают под большим углом относительно направления распространения фотона, нетрудно получить из (14), если в ней произвести замены⁽³⁾.

$$\vartheta = \pi - \vartheta_+; \quad \vartheta_0 = \vartheta_-; \quad \varphi = \varphi_+ - \pi; \quad E = -E_+; \quad p_0 = p_-; \quad p = p_+,$$

где величины со знаком плюс относятся к позитрону, а со знаком минус — к электрону, и кроме того умножить ее на

$$\frac{p_-^2 \cdot dE + \left(\frac{\partial E_F}{\partial E} \right)_K \left(\frac{\partial E_+}{\partial E_F} \right)_{E_-}}{K^2 dK}$$

В заключение выражаю благодарность Г. М. Гарибяну за ценное обсуждение настоящей работы.

Ереванский Гос. Университет
им. В. М. Молотова

Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Ծառայողական և երկրորդային էլեկտրոնների տրեքադրոնի վրա

Էլեկտրոնների տրեքադրոնի ճառագայթման հավանականությունը հաշվելիս, սովորաբար ճիշդի մասան ենթադրվում է անվերջ մեծ: Այսպիսի մոտեցումը ճիշտ է, եթե մեզ հետաքրքրում է էլեկտրոնների ցրումը միայն փոքր անկյունների տակ և պրոցեսի լրիվ բնդայնական հորվածքը: Այդ մոտեցումը կդադարի ճիշտ լինելուց, եթե էլեկտրոնները, որոնց էներգիան $E_0 \geq M$ (որակա M -ը պրոտոնի հանգստի էներգիան է), ցրվում են մեծ անկյունների տակ: Այդպիսի պրոցեսներում սկզբում հանգստացող պրոտոնը կարող է ձեռք բերել մեծ կրնետիկ էներգիա և հնարավորություն կունենա ճառագայթել

Ֆոտոններ: Բացի դրանից պրոտոնի և էլեկտրոնի կուլոնյան փոխազդեցությունը հաշվելիս պետք է օգտագործել ուշացող պոտենցիալները: Այս աշխատանքում ուսումնասիրված է էլեկտրոնների արգելակման ճառագայթումը, երբ նրանք պրոտոնների և միջուկների կողմից ցրվում են մեծ անկյունների տակ: Հաշվի է առնված պրոտոնի շարժումը և ուշացման երևույթը մասնիկների կուլոնյան փոխազդեցության մեջ: Դիֆերենցիալ ընդլայնական կտրվածքի համար դուրս է բերված մի նոր բանաձև՝ (14): Ցույց է տրված, որ պրոտոնի ճառագայթման հավանականությունը շատ փոքր է համեմատած էլեկտրոնների ճառագայթման հավանականության հետ և այդ պատճառով կարելի է այն արհամարել:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц. ИЛ, 1947. ² Н. Н. Колесников, Д. И. Блохинцев, ЖЭТФ, 20, 579, 1950. ³ В. Гейтлер, Квантовая теория излучения. М, 1940. ⁴ Г. С. Саакян, Диссертация, ФИАН, 1949.